现代数学基础丛书 137

局部域上的调和分析与分形分析及其应用

苏维宜 著

科学出版社

(O-4340.0101)

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-031415-4

9 787030 314154 >

销售分类建议：高等数学

定 价：58.00 元

现代数学基础丛书 137

局部域上的调和分析与分形分析及其应用

苏维宜 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书内容涉及局部域上的调和分析与分形分析及其应用的三个方面：首先从局部域的基本知识入手，介绍局部域的运算结构与拓扑结构及其特征群的结构，作为本书的理论基础. 然后转入局部域上的调和分析，详细介绍其上的 Fourier 分析、函数逼近论、函数空间理论等方面的基本理论与最新成果，并且建立局部域上分形空间以及 p 型微积分的框架. 接着介绍局部域上的分形分析，包括局部域上分形几何的重要概念与定理、局部域上分形分析的核心问题之一的分形 PDE 理论与初步研究成果. 最后介绍分形分析在临床医学上的应用. 阅读本书需具备大学高年级的数学基础.

本书可作为高等院校数学系高年级本科生和研究生的教材，也可供相关专业的教师、科研人员及工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

局部域上的调和分析与分形分析及其应用/苏维宜著. —北京：科学出版社，2011

(现代数学基础丛书；137)

ISBN 978-7-03-031415-4

Ⅰ.①局… Ⅱ.①苏… Ⅲ.①局部域-调和分析②局部域-分形理论 Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 106735 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：何燕萍
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 6 月第一次印刷 印张：19
印数：1—2 500 字数：365 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

20 世纪 70 年代中期, Taibleson[84] 的 *Fourier Analysis on Local Fields* 将前人关于局部域 (local field) 的工作做了精湛的总结, 打下了局部域上调和分析的基础. 这是调和分析研究领域中的重要分支之一, 它以局部域为底空间 (underlying space), 研究抽象调和分析中的前沿课题, 包括理论探讨与实际应用等多方面的热点问题, 涉及物理、化学、天文、计算机科学、地质、气象, 以及工业应用中的信号分析与传输等领域.

几乎同一个时期, Mandelbrot[32],[33] 提出了 "分形" 概念, 开创了分形几何研究的先河, 形成几何测度论研究的新亮点. 分形几何的研究对象是经典数学无能为力或无法处理的当代科学研究领域或生产实践中层出不穷的不规则的图形与函数, Mandelbrot 称其为 "fractal", 译为 "分形". 例如, 众所周知的处处连续、处处不可微的 Weierstrass 函数, 就是一个分形函数; 又如熟悉的 Cantor 三分集是一个分形集. 科学家们很快认识到, 分形是非线性现象的共性之一, 分形研究也很快成为非线性科学的核心内容之一.

将所研究的集合视为局部域中的集合, 所研究的函数视为定义在局部域上的函数, 于是, 局部域上的调和分析与局部域上的分形分析把数学科学基础学科之一的 "抽象调和分析" 与刻画非线性科学共性的 "分形分析" 紧密地联系起来. 这种联系是内在的、本质的, 且是由局部域的结构确定的.

局部域是局部紧、全不连通、非阿基米德赋值、完备的拓扑域, 它有广泛的应用背景, 例如, 数的二进制与 p 进制都是局部域的特例. 更令人感兴趣的是 "分形" 所刻画的自然现象、变量之间的关系, 可以用局部域上定义的函数关系来描述. 因此, 局部域上的调和分析与分形分析的结合与发展便成为必然.

在研究局部域分析与分形分析的同时, 我们发现生命科学与临床医学中出现的新问题与我们的研究有密切关系. 例如, 人类的 2 万多个基因, 究竟哪些基因控制人类的心脏, 哪些控制肝脏? 每个基因的作用是什么? 又如, 肝癌的恶性程度与肿瘤边界的形状 (边界的分形维数) 有何关系? 等等. 我们也发现, 众多不断涌现出的新课题, 都可利用局部域分析、分形分析等工具建立数学模型, 达到真正的数学量化, 并推动生命科学、临床医学与数学科学的结合, 使交叉学科得到实质性的进展. 所有这些是传统数学做不到的.

写作本书的初衷是向科学工作者展示一个新的研究方向 —— 局部域上的调和分析与分形分析及其应用, 包括局部域的基本知识与近三十年来该方向的最新科研

成果. 从数学基础理论开始, 到临床医学关乎人类生命的实际病例为止, 全书一气呵成, 形成一个完整的自包含体系, 使读者了解这个研究方向已经做了什么, 正在做什么, 还将要做什么, 也使得有兴趣与有志于这个课题研究的科学工作者能从中得到益处.

本书分三个大部分, 共 7 章. 一是局部域的基本知识 (第 1,2 章); 二是局部域上的调和分析的基础理论 (第 3,4 章); 三是局部域上的分形分析、理论与应用 (第 5~7 章). 第 1 章介绍 Galois 域 $GF(p)$ 的基本知识与局部域的结构; 第 2 章对局部域的特征群作详细分析; 第 3, 4 章是局部域上调和分析的基础理论, 包括局部域上的 Fourier 分析、局部域上的函数空间、以局部域为底空间的微积分, 以及局部域分析与经典分析的深入比较; 第 5 章转入局部域上的分形分析, 包括分形的基本知识、局部域上的分形集合与分形函数、局部域分形分析与欧氏空间分形分析各自的特点以及它们之间的关系; 第 6 章是局部域上的分形偏微分方程 (PDE), 给出分形 PDE 的基础性研究成果与挑战性研究课题; 最后, 第 7 章给出分形在临床医学中的应用.

相对于经典调和分析而言, 局部域上的调和分析与分形分析还非常年轻, 才 30 余年, 这在人类历史与知识的长河中, 几乎是一个瞬间. 然而, 它却是反映自然界规律、人类生命规律的非线性科学本质的有力工具. 随着时间的推进, 人类对自然界将有更为深刻的认识, 宇宙的本质也将逐渐被揭开. 因此, 可以期望, 局部域上的调和分析与分形分析及其应用将成为人类认识自然、改造自然的一个有力工具.

作者集长期以来关于局部域研究的经历, 总结 30 余年来南京大学数学系调和分析与分形分析科研团队的科研成果, 其中包含了最新的研究成果, 如南京大学数学系郑维行教授、何泽霖教授、江惠坤教授、王肇西教授、吴兆金副教授、阮火军博士、姚奎博士、邱华博士, 以及我们所指导的博士朱月萍教授、郑世骏博士、周广才博士、吴宝义博士、李垠博士、马林涛博士, 本科生彭云、沈开明、顾庆松等的科研工作, 都已经列在参考文献中, 这里一并致谢. 在写作过程中, 得到浙江大学王斯雷教授、北京师范大学陆善镇教授以及科学出版社责任编辑的大力协助, 在此对他们表示衷心感谢!

本书试图从严格的数学理论出发, 直到该领域的前沿, 展现一个新学科领域的发展. 在写作过程中努力做到由浅入深, 语言简洁, 重点突出, 一气呵成, 希望读者能从中受益. 然而, 由于作者水平有限, 在本书的取材、编写等方面的缺点或错误在所难免, 存在着许多不尽人意之处, 敬请专家与读者不吝赐教.

作　者

2010 年中秋前夕于南京

目　　录

第1章　基本知识

1.1　Galois 域 $GF(p)$

Galois 域是研究局部域的理论基础, 本节首先介绍 Galois 域的基本知识.

1.1.1　Galois 域 $GF(p)$、特征数 p

从 "Abel 群" 与 "域" 的定义出发.

定义 1.1.1 (Abel 群)　设集合 G 中的元素之间具有一个运算, 记为 $\times$, 满足:

(i) 封闭性: $x,y\in G\Rightarrow x\times y\in G$;

(ii) 结合律: $x,y,z\in G\Rightarrow (x\times y)\times z=x\times(y\times z)$;

(iii) 单位元: 存在关于运算 $\times$ 的单位元 $e\in G$, $\forall x\in G\Rightarrow x\times e=x$;

(iv) 逆元: $\forall x\in G$, 存在逆元 $x^{-1}\in G$, 使得 $x\times x^{-1}=e$;

(v) 交换律: $\forall x,y\in G\Rightarrow x\times y=y\times x$.

则称集合 G 为一个Abel 群. 通常将一个群与它的运算记为 $(G,\times)$, 也简记为 G. 运算 $x\times y$, 也简记为 $x\cdot y$, 或省略 $\times$, 记为 xy.

这里的运算 $\times$, 可以是乘法、加法, 或满足以上条件的任何运算, 例如, 对于实数集 $\mathbb{R}$, 在实数的加法运算 $+$ 之下构成一个 Abel 群 $(\mathbb{R},+)$, 其单位元 e 就是实数 0; 正实数集 $\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$ 在实数的乘法运算 $\times$ 之下, 构成一个 Abel 群 $(\mathbb{R}^+,\times)$, 其单位元 e 就是自然数 1.

Abel 群的例子很多, 请读者自行列举.

今后, 记实数集合为 $\mathbb{R}$, 复数集合为 $\mathbb{C}$, 它们在实数与复数的加法运算下都成为一个 Abel 群.

定义 1.1.2 (群的非零元的阶)　在 Abel 群 $(G,\times)$ 中, 对于一个非零元 $a\in G\backslash\{0\}$, 使得

$$a^m=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m}=e \tag{1.1.1}$$

成立的最小正整数 $m\in\mathbb{N}$ 称为元 a 的阶; 若不存在这样的正整数, 则称 a 为*无穷阶的*.

定义 1.1.3 (域)　设集合 F 中的元之间具有两个运算, 分别称为加法 $+$ 与乘法 $\times$, 满足:

(i) 关于加法 $+$, 集合 F 构成一个 Abel 群;

(ii) 关于乘法 $\times$, 集合 $F\backslash\{0\}$ 构成一个 Abel 群;

(iii) 关于加法与乘法, F 中的元满足加乘分配律

$$x,y,z\in F\Rightarrow x\times(y+z)=x\times y+x\times z.$$

则称集合 F 为一个域, 记为 $(F,+,\times)$, 也简记为 F.

实数域 $(\mathbb{R},+,\times)$、复数域 $(\mathbb{C},+,\times)$ 是最常用的数域.

定义 1.1.4 (域的特征数)　设 $(F,+,\times)$ 是一个域. 若对于 F 的加法而言, F 的所有非零元都有相同的阶数, 记为 p, 则称 p 为域 F 的**特征数**.

域的特征数对于研究域的性质与构造有重要作用, 下面列举特征数的几个重要性质, 但略去证明, 读者可参看有关参考书 [6],[87].

域的特征数有如下性质:

定理 1.1.1　设 $(F,+,\times)$ 是一个域, p 是其特征数. 则

(1) p 可以是有限数 (此时 p 是一个正整数, 称域的特征数为 p), 也可以是无穷大 (此时称域的特征数为 ∞, 也称域的特征数为零, $p=0$);

(2) 若域 F 的特征数 $p=0$, 则域 F 与有理数域同构 (即 F 的势为 $\aleph_0$), 此时, F 中含有可数多个元;

(3) 若域 F 的特征数为有限数 p, 则 p 必为素数; 此时, $0<p<\infty$, 域 F 成为一个**有限域**.

定义 1.1.5 (Galois 域)　若 F 为有限域, p 为其特征数, 则 p 是满足

$$p\times x\equiv p\cdot x\equiv\underbrace{x+x+\cdots+x}_{p}=0,\quad\forall x\in F\tag{1.1.2}$$

的最小正整数, 且必为素数, 这里 $0\in F$ 是 F 的加法零元, 此时 F 中含 p 个元, 称这个有限域为**Galois 域**, 记为 $GF(p)$.

对于 Galois 域 $GF(p)$ 的结构, 有

定理 1.1.2　Galois 域 $GF(p)$ 与整数同余类 $\mathbb{Z}/p$ 同构,

$$GF(p)\sim\mathbb{Z}/p=\{0,1,\cdots,p-1\},$$

这里 $\mathbb{Z}$ 为整数集, $p\geqslant 2$ 为素数.

1.1.2　Galois 域 $GF(p)$ 的代数扩域 F

定义 1.1.6 (扩域)　定义 Galois 域 $GF(p)$ 的扩域如下:

(i) 若域 F 包含一个 Galois 域, $F\supset GF(p)$, 则称域 F 为 $GF(p)$ 的**扩域**;

(ii) 若 F 中的每个元都是 $GF(p)$ 的**代数元**, 即 $\forall\gamma\in F$, 有

$$\sum_{k=0}^{n}c_k\gamma^k=0,\quad c_k\in GF(p),\quad k=0,1,\cdots,n,\tag{1.1.3}$$

则称域 F 为 $GF(p)$ 的代数扩域, 记为

$$GF(p)[\alpha], \quad \alpha \in F \backslash GF(p). \tag{1.1.4}$$

关于 $GF(p)$ 的代数扩域, 有以下结论:

定理 1.1.3 设 $GF(p)$ 是一个 Galois 域. 则

(1) $GF(p)$ 的任一有限扩域都是代数扩域, 并且可以由 $GF(p)$ 通过添加有限个代数元得到; 反之, $GF(p)$ 的每个添加有限个代数元而生成的扩域都是有限扩域.

(2) $GF(p)$ 的代数扩域 F 是 $GF(p)$ 上的线性空间; 若 F 的维数为 n, 则称 n 为扩域 F 在 $GF(p)$ 上的次数, 记为 $n=(F:GF(p))$. 当扩域 F 的次数为有限数时, 则称其为有限扩域, 否则称为无限扩域.

(3) 设 $GF(p)$ 的有限代数扩域为 F, 则

$$F = GF(q),$$

其中 $q = p^c$, $c \in \mathbb{N}$ 为正整数, 且

$$c = (GF(q) : GF(p)) \tag{1.1.5}$$

为扩域的次数.

于是, 有限代数扩域 $F = GF(q)$ 是 Galois 域 $GF(p)$ 上的 c 维线性空间. 如此, $GF(q)$ 中存在关于 $GF(p)$ 的一个基底

$$\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{c-1}, \tag{1.1.6}$$

其中

$$\rho_0 \in GF(p), \quad \rho_1, \cdots, \rho_{c-1} \in GF(q) \backslash GF(p),$$

使得 $\forall \alpha \in GF(q)$, $\exists \gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{c-1} \in GF(p)$, 有表示式

$$\alpha = \gamma_0\rho_0 + \gamma_1\rho_1 + \cdots + \gamma_{c-1}\rho_{c-1}, \tag{1.1.7}$$

当 $\alpha \neq 0$ 时, $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{c-1}$ 不全为零.

(4) Galois 域 $GF(p)$ 是一个素域, 即它不含真子域.

由于一个素域或与有理数域同构 (若它是无穷域), 或与整数同余类 $\mathbb{Z}/p$ 同构 (若它是有限域), 因此, $GF(p) \sim \mathbb{Z}/p$.

(5) Galois 域 $GF(p)$ 的有限代数扩域 $GF(q)$ 含有一个与 mod p 同余类 $\mathbb{Z}/p$ 同构的含 p 个元素的素域, 即含有 $GF(p)$.

(6) $GF(q)$ 中有 $q=p^n$ 个元, 每个元 $\alpha\in GF(q)$ 都是函数 x^q-x 的零点.

对于给定的 p 与 c, 一切具有 $q=p^c$ 个元的域都是同构的. 进而, $GF(q)$ 中的一切子域都是形如 $GF(p^m)$ 的 Galois 域, 其中 m 是 c 的因子.

$GF(q)$ 中元的具体表示如下:

定理 1.1.4　设 $GF(q)=GF(p^c)$, $p\geqslant 2$ 为素数, $c\in\mathbb{N}$. 则

(1) 当 $c=1$ 时, $GF(q)\overset{\text{同构}}{\longleftrightarrow}\{0,1,\cdots,p-1\}$, 且每个元 $\alpha\in GF(p)$ 都是 p 次函数 x^p-x 的零点.

(2) 当 $c=2$ 时, 取 $GF(q)$ 的一个代数元 $\rho\notin GF(p)$, 即存在 $a_0,a_1,a_2\in GF(p)$ 不全为零, 使得元 ρ 满足代数方程

$$a_0+a_1\rho+a_2\rho^2=0. \tag{1.1.8}$$

于是, $GF(p^2)$ 中的元以 $\rho_0=1$、ρ 为基底 ($1\in GF(p)$ 是 $GF(p)$ 的单位元), 表示为

$$GF(p^2)=\{\gamma_0\cdot 1+\gamma_1\cdot\rho:\gamma_0,\gamma_1\in GF(p)\}, \tag{1.1.9}$$

且每个元 $\alpha\in GF(p^2)$ 都是 p^2 次函数 $x^{p^2}-x$ 的零点.

(3) 当 $c\in\mathbb{N}$ 时, $GF(p^c)$ 中的元以 $\{1,\rho_1,\cdots,\rho_{c-1}\}$ 为基底, 表示为

$$GF(p^c)=\{\gamma_0\cdot 1+\gamma_1\cdot\rho_1+\cdots+\gamma_{c-1}\rho_{c-1}:\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{c-1}\in GF(p)\}, \tag{1.1.10}$$

且每个元 $\alpha\in GF(p^c)$ 都是 p^c 次函数 $x^{p^c}-x$ 的零点.

Galois 理论是具有相当深度与相当复杂的理论, 这里用到的只是其中最基本的内容. 本节参考文献是 [6], [26], [87].

1.2　局部域 K_q 的结构

设 $q=p^c$, $p\geqslant 2$ 为素数, $c\in\mathbb{N}$. 本节介绍局部域的基本知识 [84].

1.2.1　局部域的定义

定义 1.2.1 (局部紧域)　设 K 既是一个域 (运算结构为 $+,\times$), 又是一个完备的 T_2 型拓扑空间 (拓扑结构为 τ). 若它的加群 $(K^+,+)$ 与乘群 $(K^*,\times)=(K\backslash\{0\},\times)$ 都是局部紧 Abel 群, 且其域运算 (加法 +、乘法 ×) 与拓扑空间结构 (拓扑 τ) 相互协调, 即加法 + 与乘法 ×:

$$(x,y)\in K\times K\to x+y\in K, \tag{1.2.1}$$

$$(x,y)\in K^*\times K^*\to x\times y\in K^* \tag{1.2.2}$$

在拓扑结构 τ 之下是连续映射, 则称 K 为局部紧拓扑域, 简称*局部紧域*.

据 "域论" 的结果, 有

定理 1.2.1 设 K 是一个非平凡的局部紧拓扑域,

(1) 若 K 是连通的, 则它只能是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$;

(2) 若 K 是不连通的, 则它是全不连通的. 此时, K 是 T_2 型、局部紧、全不连通、非平凡、完备的拓扑域, 称其为*局部域*. 局部域 K 只能是如下四种情形之一:

① 若 K 具有非零有限特征数 p, 则 K 包含一个与 Galois 域 $GF(p)$ 同构的素域:

当 $c=1$ 时, K 是一个 *p 级数域*(*p*-series field);

当 $c>1$ 时, K 是 *p 级数域的 c 级有限代数扩域*;

② 若 K 具有零特征数 (即特征为 ∞), 则 K 包含一个与有理数域 $\mathbb{Q}$ 同构的素域:

当 $c=1$ 时, K 是一个 *p 进数域*(*p*-adic number field);

当 $c>1$ 时, K 是 *p 进数域的 c 级有限代数扩域*.

本书中, 为强调局部域 K 对于 p 与 c 的依赖性, 当 $c=1$ 时, 记 K 为 K_p; 而当 $c>1$ 时, 记为 K_q , 其中 $q=p^c$.

1.2.2 局部域 K_q 的赋值结构

设 $K_q=(K,\oplus,\otimes,\tau)$ 是一个 T_2 型、局部紧、全不连通、非平凡、完备的拓扑域. 为方便起见, 在本书中作如下约定: 局部域的加法 $\oplus$ 与乘法 $\otimes$ 都简记为 $x+y, x\times y$, 乘法也简记为 $x\cdot y$, 或 xy. 局部域记为 $K_q=(K,+,\times,\tau)$.

对于 K_q, 可以赋予非阿基米德赋值.

定义 1.2.2 (非阿基米德赋值) 设 F 是一个域, 若 F 到 $[0,+\infty)$ 的映射 $x\in F\to|x|\in[0,+\infty)$, 满足

(i) $|x|\geqslant 0$, 且 $|x|=0\Leftrightarrow x=0$;

(ii) $|x\cdot y|=|x|\,|y|$;

(iii) $|x+y|\leqslant\max\{|x|,|y|\}$, 且若 $|x|\neq|y|$, 则 $|x+y|=\max\{|x|,|y|\}$.

则称 $|x|$ 为 $x\in F$ 的*非阿基米德赋值*, 并称 F 为*非阿基米德赋值域*.

(iii) 中不等式常称为超距不等式.

可以证明, 局部域 K_q 是非阿基米德赋值域.

定理 1.2.2 设局部域 K_q(包括 p 级数域、p 进数域以及它们的有限代数扩域) 是一个非阿基米德赋值域. K_q 赋值的值域为

$$\forall x\in K_q\Rightarrow|x|\in\left\{q^k:k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\{0\}. \tag{1.2.3}$$

当 $c=1$ 时, K_p 的非阿基米德赋值的值域为

$$\forall x\in K_p\Rightarrow|x|\in\left\{p^k:k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\{0\}. \tag{1.2.4}$$

后面将逐步给出关于非阿基米德赋值的运算方法.

1.2.3　局部域 K_q 上的 Haar 测度与 Haar 积分

1. *局部紧群上的 Haar 测度与 Haar 积分*

每一个局部紧群, 其上存在平移不变的 Haar 测度与 Haar 积分.

定理 1.2.3　设 G 是局部紧群, 则其上存在左平移不变测度 μ_l 与右平移不变测度 μ_r, 使得对于 G 的任一个 Borel 集 $F \subset G$, 满足

(1) 左平移不变性: $\forall a \in G \Rightarrow \mu_l(aE) = \mu_l(E)$;

(2) 右平移不变性: $\forall a \in G \Rightarrow \mu_r(Ea) = \mu_r(E)$.

若 G 是局部紧 Abel 群, 则左平移不变测度与右平移不变测度相等, $\mu \equiv \mu_l \equiv \mu_r$, 称 μ 为 Haar 测度:

$$\forall a \in G \Rightarrow \mu(aE) = \mu(Ea) = \mu(E).$$

以抽象调和分析的常规方法可以证明:

定理 1.2.4　在局部紧 Abel 群上, 存在对应于 Haar 测度的平移不变积分, 称为 Haar 积分, 记为

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2.5}$$

$\mathrm{d}x \equiv \mathrm{d}\mu$ 是相应的 Haar 积分微元. Haar 积分满足

$$\int_G f(ax)\,\mathrm{d}x = \int_G f(xa)\,\mathrm{d}x = \int_G f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a \in G.$$

进而, 在相差一个常数因子的意义下, 局部紧 Abel 群上的 Haar 积分是唯一确定的.

2. *局部域 K_q 上的 Haar 积分*

局部域 K_q 中包含了两个局部紧 Abel 群: 加群 K_q^+ 与乘群 K_q^*. 因此, 对于 K_q^+, K_q^* 都存在相应的 Haar 积分. 在局部域的调和分析中, 这两个群上的 Haar 积分都具有重要的地位. 本书重点讨论 K_q^+ 上的调和分析. 对于 K_q^*, 其上的调和分析具有更特殊、更有趣、更值得研究的性质, 在本书最后将给出提示与思考.

对于局部域 K_q 的加群 K_q^+, 其 Haar 积分记为

$$\int_{K_q} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

满足平移不变性

$$\int_{K_q} f(x+a)\,\mathrm{d}x = \int_{K_q} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall a \in K_q.$$

需要定义 $a \in K_q \setminus \{0\}$ 的模函数.

定义 1.2.3 (模函数) 设 K_q 为局部域, 定义 $a \in K_q \setminus \{0\}$ 的模函数 $a \to |a|$ 为

$$|a| = \frac{\displaystyle\int_{K_q} f\left(a^{-1}x\right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{K_q} f\left(x\right) \mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_{K_q} f\left(x\right) \mathrm{d}\left(ax\right)}{\displaystyle\int_{K_q} f\left(x\right) \mathrm{d}x}, \tag{1.2.6}$$

其中 $\mathrm{d}(ax)$ 满足

$$\mathrm{d}\left(ax\right) = |a| \,\mathrm{d}x. \tag{1.2.7}$$

这里的模函数实际上也是 K_q 上的一种非阿基米德赋值 (K_q 上的 Haar 测度与非阿基米德赋值在相差一个常数因子的意义下都是唯一的).

进而, 若定义

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|, \tag{1.2.8}$$

则 K_q 成为一个 "超距空间".

由此, 一个局部域 K_q 实际上是一个 T_2 型、局部紧、全不连通、非阿基米德赋值、完备的超距拓扑域.

注 局部域 K_p 还可以视为 "有理数域 $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{q}{p} : q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\right\}$ 关于非阿基米德赋值 $x \in K_p \to |x| \in [0, +\infty)$ 的完备化"[46].

1.2.4 局部域 K_q 中的重要子集

利用非阿基米德赋值来定义局部域 K_q 中的一些重要子集是适宜的. 下面所用的这些集合的名称, 例如素群、环、子环、整数环、理想、素理想、最大理想、单位元素群、分数理想等, 都是代数学中常用的标准的概念, 这里不作详细介绍, 读者可参看文献 [6], [26], [87] 中的定义. 在局部域分析中, 特别重要的是集合在局部域 K_q 的非阿基米德赋值之下的表示、Haar 测度、拓扑性质 (如开、闭、紧性) 等.

1. K_p 中的子集

(1) K_p 的整数环 (the ring of integers in K_p) D:

$$D = \{x \in K_p : |x| \leqslant 1\}, \tag{1.2.9}$$

它是 K_p 的唯一的最大紧子环 (the unique maximal compact subring), 也是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $|D| = 1$.

(2) K_p 的素理想 (the prime ideal in K_p) B:

$$B = \{x \in K_p : |x| < 1\}, \tag{1.2.10}$$

它是 D 内唯一的最大理想 (the unique maximal ideal), 也是主理想与素理想, 并且还是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $|B| = p^{-1}$.

(3) K_p^* 的单位素群 (the group of unit in K_p^*) D^*:

$$D^* = \{x \in K_p : |x| = 1\} = D \backslash B, \tag{1.2.11}$$

它也是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $|D^*| = 1 - p^{-1}$.

(4) K_p 的分数理想 (the fractional ideal in K_p) B^k:

$$B^k = \left\{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-k}\right\} = \beta^k D, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.12}$$

它们都是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $\left|B^k\right| = p^{-k}$.

另一方面, 对于 $k \geqslant 0$, B^k 是 K_p 的子环.

易见, $B = \{x \in K_p : |x| < 1\} = \left\{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-1}\right\} = B^1$.

注 以上子集的 Haar 测度将在 2.3 节给出详细的计算.

2. K_q 中的子集

对于扩域 K_q, 可类似地定义以上子集, 并且为区分起见, 在记号后加上 q, 例如

$$\begin{aligned}
D(q) &= \{x \in K_q : |x| \leqslant 1\}, \\
B(q) &= \{x \in K_q : |x| < 1\}, \\
D^*(q) &= \{x \in K_q : |x| = 1\}, \\
B^k(q) &= \left\{x \in K_q : |x| \leqslant q^{-k}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

1.2.5 局部域 K_q 的邻域基

1. K_p 的邻域基

利用非阿基米德赋值可以给出 K_p 中加法零元 0 的拓扑邻域基, 即基本邻域系.

由于集族 $\left\{B^k \subset K_p : k \in \mathbb{Z}\right\}$ 与其中的集合 B^k 满足:

(i) $\left\{B^k \subset K_p : k \in \mathbb{Z}\right\}$ 是零元 0 的邻域滤系基, 且递减, $B^{k+1} \subset B^k, k \in \mathbb{Z}$;

(ii) $B^k, k \in \mathbb{Z}$, 是 K_p 中的既开又闭且紧的集合;

(iii) $K_p = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B^k$, $\{0\} = \bigcap\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B^k$;

(iv) 商群 D/B 可表示为

$$D/B = \left\{0 \cdot \beta^0 + B, 1 \cdot \beta^0 + B, \cdots, (p-1) \cdot \beta^0 + B\right\},$$

其中 $j \cdot \beta^0 + B, j = 0, 1, \cdots, p-1$ 是 B 在 D 中的 p 个陪集, 并且集组

$$\left\{j \cdot \beta^0 + B : j = 0, 1, \cdots, p-1\right\} \tag{1.2.13}$$

与有限 Galois 域 $GF(p)$ 同构.

所以 $\{B^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 K_p 中的 0 元的邻域基, 也就是 K_p 的邻域基.

2. K_q 的邻域基

只需将 K_p 中的集 B^k 换为 $B^k(q)$ 即可.

1.2.6 局部域 K_q 中元的表示与运算

1. K_p 中元的表示与运算

K_p 中存在一个元 $\beta\in K_p$, 其非阿基米德赋值为 $|\beta|=p^{-1}$, 称为 K_p 的生成元(也称为素元) 使得 $\forall x\in K_p$, 都可表示为

$$x=x_s\beta^s+x_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots, \tag{1.2.14}$$

其中 $x_s,x_{s+1},\cdots\in\{0,1,\cdots,p-1\}, s\in\mathbb{Z}$, 并且 $\forall x\in K_p, x_s\neq 0$, 在 (1.2.14) 的表示下有唯一的非阿基米德赋值 $|x|=p^{-s}$.

要特别指出的是: p 级数域, 记为 S_p, 特征数是素数 $p\geqslant 2$; p 进数域, 记为 A_p, 特征数是 $p=0$, 它们的差别很大. 这种差别也体现在它们的加法运算与乘法运算上.

(1) p 级数域 S_p: $\forall x\in S_p$, 可表示为 (1.2.14) 式:

$$x=x_s\beta^s+x_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots,\quad x_s,x_{s+1},\cdots\in\{0,1,\cdots,p-1\},\quad s\in\mathbb{Z},$$

加法运算是不进位、按位 mod p 加法: 对于 $x,y\in S_p$,

$$x=x_s\beta^s+x_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots,\quad y=y_s\beta^s+y_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots,$$

定义

$$x+y=(x_s+y_s)\beta^s+(x_{s+1}+y_{s+1})\beta^{s+1}+\cdots,$$

其中

$$x_j+y_j=x_j+y_j\,(\mathrm{mod}\ p),\quad \forall j\geqslant s,\quad s\in\mathbb{Z}.$$

(2) p 进数域 A_p: $\forall x\in A_p$, 可表示为 (1.2.14) 式:

$$x=x_s\beta^s+x_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots,\quad x_s,x_{s+1},\cdots\in\{0,1,\cdots,p-1\},\quad s\in\mathbb{Z},$$

加法运算是自左至右进位、按位 mod p 加法: 对于 $x,y\in A_p$,

$$x=x_s\beta^s+x_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots,\quad y=y_s\beta^s+y_{s+1}\beta^{s+1}+\cdots,$$

定义

$$x+y=(\overline{x}_s+\overline{y}_s)\beta^s+(\overline{x}_{s+1}+\overline{y}_{s+1})\beta^{s+1}+\cdots,$$

对于其中的每个 $j\geqslant s, s\in\mathbb{Z}$, 有

$$\overline{x}_j+\overline{y}_j=\begin{cases} x_j+y_j, & 0\leqslant x_j+y_j<p,\\ p-(x_j+y_j), & x_j+y_j\geqslant p \text{ 且 } \overline{x}_{j+1}+\overline{y}_{j+1}=x_{j+1}+y_{j+1}+1. \end{cases}$$

注 表示式 (1.2.14) 应理解为 Galois 域上的形式幂级数.

事实上, 将式 (1.2.14) 记为

$$x=\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\beta^j,\quad s\in\mathbb{Z},$$

其中

$$x_j\in\{0,1,\cdots,p-1\}\leftrightarrow GF(p),\quad j=s,s+1,\cdots,$$

$\beta\in K_p, |\beta|=p^{-1}$. 这说明 K_p 中的元都可表示为 Galois 域 $GF(p)$ 上的形式幂级数.

另一方面, B^{s+1} 在 B^s 上的陪集所成的商集 B^s/B^{s+1} 为

$$B^s/B^{s+1}=\{0\cdot\beta^s+B^{s+1},1\cdot\beta^s+B^{s+1},\cdots,(p-1)\cdot\beta^s+B^{s+1}\},$$

于是

$$B^s/B^{s+1}\leftrightarrow GF(p),$$

对应关系为

$$j\cdot\beta^s+B^{s+1}\leftrightarrow j,\quad j=0,1,\cdots,p-1.$$

因此, (1.2.14) 又可写为 $x=x_s\beta^s+\bar{x}, \bar{x}\in B^{s+1}, x_s\neq 0, s\in\mathbb{Z}$.

同时, S_p 与 A_p 中的乘法也分别为不进位的按位 mod p 运算与自左至右进位的按位 mod p 运算. 通常使用记号 $x\oplus y$ 与 $x\otimes y$, 在不发生混淆的情况下, 本书中就直接用 $x+y$ 与 xy, 已在 1.2.2 节中说明.

2. $K_q, q=p^c, c\in\mathbb{N}$ 中元的表示与运算

回顾 Galois 域的有限代数扩张的理论: 对于 Galois 域 $GF(p)\leftrightarrow\{0,1,\cdots,p-1\}$, 其 c 级有限代数扩域记为

$$GF(q),\quad q=p^c,\quad c\in\mathbb{N},$$

$GF(q)$ 是 $GF(p)$ 上的 c 维线性空间. 设 $GF(q)$ 在 $GF(p)$ 上的一组基为

$$\{\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_{c-1}\},\tag{1.2.15}$$

其中 $\rho_0 \in GF(p)$, $\rho_1, \cdots, \rho_{c-1}$ 是 $GF(p)$ 的代数元, 且 $\{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{c-1}\}$ 中的元是扩域 $GF(q)$ 中的线性无关组. 于是, 有限代数扩域 $GF(q)$ 中的元 $z \in GF(q)$ 都可表示为

$$z = \gamma_0\rho_0 + \gamma_1\rho_1 + \cdots + \gamma_{c-1}\rho_{c-1}, \tag{1.2.16}$$

其中 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{c-1} \in GF(p) = \{0, 1, \cdots, p-1\}$.

据 Galois 域的有限代数扩张的理论, 由 $q = p^c$ 知, K_q 是 K_p 的 c 级代数扩域. 取 K_q 中的商集

$$D^*(q) = D(q)/B(q). \tag{1.2.17}$$

设 $D(q)/B(q)$ 在 D/B 上的基为

$$\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{c-1}\} \subset D^*(q),$$

使得

$$\{\rho(\varepsilon_0), \rho(\varepsilon_1), \cdots, \rho(\varepsilon_{c-1})\}$$

为 $GF(q)$ 在 $GF(p)$ 上的一组基

$$\{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{c-1}\}.$$

于是, $\forall x \in B^k(q) \subset K_q$, $k \in \mathbb{Z}$, 对于 $\widetilde{\beta} \in B(q)$, $\left|\widetilde{\beta}\right| = q^{-1}$, 有

$$x = \sum_{j=s}^{+\infty} c_j \widetilde{\beta}^j, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.18}$$

其中 $c_j \in D(q)/B(q)$, 且

$$c_j = \gamma_0^j\varepsilon_0 + \gamma_1^j\varepsilon_1 + \cdots + \gamma_{c-1}^j\varepsilon_{c-1}, \tag{1.2.19}$$

与 $\gamma_0^j, \gamma_1^j, \cdots, \gamma_{c-1}^j \in D/B$, $j = s, s+1, \cdots$, 使得 $|x| = |\widetilde{\beta}|^s = q^{-s}$.

特别要指出的是: p 级数域与 p 进数域的有限代数扩域中的加法运算, 也是分别为*不进位的按位* mod p *加法*与*自左至右进位的按位* mod p *加法*. 乘法运算也分别为不进位与自左至右进位的按位 mod p 乘法.

总之, K_q 是 Galois 域 $GF(q) = GF(p^c)$ 上的形式幂级数域, 域的运算分为不进位的按位 mod p 运算与自左至右进位的按位 mod p 运算.

当 $c = 1$ 时, K_q 是 p 级数域 S_p, 或 p 进数域 A_p; 当 $c \neq 1$ 时, K_q 是 S_p 或 A_p 的 c 级代数扩域.

1.2.7 局部域 K_p 中球的重要性质

局部域 K_p 中的 “球” 有下列重要性质.

定理 1.2.5　(1) 设 S 与 T 是局部域 K_p 中的两个球, 则 S 与 T 或者互不相交, 或者一个包含在另一个中;

(2) K_p 中任一球 S 是多中心的;

(3) K_p 中任一球 S 是既开又闭且紧的.

证　(1) 假设 $S=x_1+B^{k_1}$, $T=x_2+B^{k_2}$ 为 K_p 中的两个球, $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$. 若 $S\bigcap T=\varnothing$, 则 S 与 T 互不相交. 若 $S\bigcap T\neq\varnothing$, 则可证明, 或 $S\subset T$, 或 $S\supset T$.

事实上, 若 $k_1\geqslant k_2$, 则对于任一 $x\in S\bigcap T$, 由超距不等式,

$$|x_1-x_2|\leqslant\max\left\{|x-x_1|,|x-x_2|\right\}\leqslant\max\left\{p^{-k_1},p^{-k_2}\right\}\leqslant p^{-k_2},$$

这表示 $x_1\in T$.

另一方面, $\forall y\in S$, 有

$$|y-x_2|\leqslant\max\left\{|y-x_1|,|x_1-x_2|\right\}\leqslant\max\left\{p^{-k_1},p^{-k_2}\right\}\leqslant p^{-k_2},$$

因此, $\forall y\in S\Rightarrow y\in T$, 此即 $S\subset T$.

若 $k_1\leqslant k_2$, 同理可证 $T\subset S$.

(2) 设 $S=x_1+B^{k_1},k_1\in\mathbb{Z}$. 任取 $x\in S$, 记以 x 为心、以 p^{-k_1} 为半径的球为 S_x, 则因对任一 $y\in S$, 有

$$|x-y|\leqslant\max\{|x-x_1|,|x_1-y|\}=p^{-k_1}.$$

可见 $y\in S_x$, 从而 $S\subset S_x$; 由对称性知, $S_x\subset S$. 故 $S_x=S$.

(3) 考虑任一球 $S=x_1+B^{k_1},k_1\in\mathbb{Z}$. 则 $S=x_1+B^{k_1}$ 中的任一点 $y\in x_1+B^{k_1}$ 由不等式

$$|y-x_1|\leqslant p^{-k_1}$$

确定. 故球 $S=x_1+B^{k_1}$ 是闭集也是紧集. 另一方面, 由于局部域 K_p 的赋值是离散赋值, 因而有

$$S=\left\{y:|y-x_1|<p^{-k_1+1}\right\},$$

这样, 球 $S=x_1+B^{k_1}$ 也是开集. 定理得证.

这个性质与欧氏空间中的球的性质迥然不同, 这是局部域结构的一个特点, 更是形成欧氏空间分析与局部域分析差别的基本原因之一.

1.2.8 局部域 K_p 的序结构

在局部域分析中, K_p 上的序结构的引进起重要作用.

设 B 在 D 中的陪集的代表元为 $\{e_0, e_1, \cdots, e_{p-1}\}$, 它与 $GF(p) = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ 是一一对应的. 下面给出 "序" 的定义.

定义 1.2.4 (K_p 中的序关系) 对于 $\{e_0, e_1, \cdots, e_{p-1}\}$, 定义其上的 "序" 关系为

$$e_0 < e_1 < \cdots < e_{p-1}. \tag{1.2.20}$$

由此, 定义 K_p 中的 "序" 关系如下: 对于 $\alpha, \lambda \in K_p$, 令

$$\alpha = \alpha_k \beta^k + \alpha_{k+1}\beta^{k+1} + \cdots, \quad \alpha_l \in \{e_0, e_1, \cdots, e_{p-1}\}, \quad l = k, k+1, \cdots,$$

$$\lambda = \lambda_k \beta^k + \lambda_{k+1}\beta^{k+1} + \cdots, \quad \lambda_l \in \{e_0, e_1, \cdots, e_{p-1}\}, \quad l = k, k+1, \cdots.$$

(i) 若 $|\alpha| < |\lambda|$, 则定义 $\alpha < \lambda$, 即 $\lambda > \alpha$;

(ii) 若 $|\alpha| = |\lambda|$, 且 $\alpha \neq \lambda$, $\exists r \in \mathbb{N}$, 有

$$\alpha_k = \lambda_k, \quad \alpha_{k+1} = \lambda_{k+1}, \cdots, \alpha_{k+r} = \lambda_{k+r}, \quad \alpha_{k+r+1} < \lambda_{k+r+1},$$

则定义 $\alpha < \lambda$, 即 $\lambda > \alpha$;

(iii) 若 α, λ 的所有坐标都相等, 则定义 $\alpha = \lambda$.

由此, 就可定义 K_p 中的种种集合.

定义 1.2.5(K_p 中的一些集合) 对于 $\alpha, \lambda \in K_p$, 若 $\alpha < \lambda$, 定义

开区间 $(\alpha, \lambda) = \{x \in K_p : \alpha < x < \lambda\}$;

闭区间 $[\alpha, \lambda] = \{x \in K_p : \alpha \leqslant x \leqslant \lambda\}$;

半开区间 $[\alpha, \lambda) = \{x \in K_p : \alpha \leqslant x < \lambda\}$ (左闭右开);

半开区间 $(\alpha, \lambda] = \{x \in K_p : \alpha < x \leqslant \lambda\}$ (左开右闭).

例如

$$\left[0, \beta^1\right) = \left\{x \in K_p : 0 \leqslant x < \beta^1\right\},$$

$$\left[0, \beta^1\right] = \left\{x \in K_p : 0 \leqslant x \leqslant \beta^1\right\}.$$

又如当 $p = 3$ 时,

$$\left[\beta^1, 2\beta^1\right] = \left\{x \in K_3 : \beta^1 \leqslant x \leqslant 2\beta^1\right\},$$

$$\left[2\beta^1, \beta^0\right] = \left\{x \in K_3 : 2\beta^1 \leqslant x \leqslant \beta^0\right\}.$$

关于区间的 Haar 测度 ("长度"), 可用下法求得: 记可测子集 $E \subset K_p$ 的示性

函数为 $\Phi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$ 由

$$\mu[0,\alpha]=\int_{K_p}\Phi_{[0,\alpha]}(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,\alpha]}\mathrm{d}x.$$

例如

$$\alpha=\alpha_s\beta^s,\quad \alpha_s\in\{1,2,\cdots,p-1\},$$

则

$$[0,\alpha]=\left[0,\beta^{s+1}\right]\bigcup\left(\beta^{s+1},\alpha\right]=\left[0,\beta^{s+1}\right]\bigcup\left(\beta^{s+1},\alpha_s\beta^s\right].$$

由

$$\mu[0,\alpha]=\mu\left[0,\beta^{s+1}\right]+\mu\left(\beta^{s+1},\alpha_s\beta^s\right],$$

其中

$$\mu\left[0,\beta^{s+1}\right]=\mu B^{s+1}=p^{-(s+1)}.$$

另一方面, 为求 $\mu\left(\beta^{s+1},\alpha_s\beta^s\right]$, 注意到

$$B^s/B^{s+1}=\left\{0\cdot\beta^s+B^{s+1},1\cdot\beta^s+B^{s+1},\cdots,(p-1)\cdot\beta^s+B^{s+1}\right\},$$

故

$$\mu\left(0\cdot\beta^s+B^{s+1}\right)=\mu\left(1\cdot\beta^s+B^{s+1}\right)=\cdots=\mu\left((p-1)\cdot\beta^s+B^{s+1}\right)=\frac{1}{p}p^{-s}.$$

于是

$$\mu\left(\beta^{s+1},\alpha_s\beta^s\right]=\alpha_s p^{-(s+1)},$$

从而

$$\mu[0,\alpha]=(\alpha_s+1)\,p^{-(s+1)},\quad 其中\ \alpha=\alpha_s\beta^s.$$

用类似的方法可求得 K_p 中其他集合的 Haar 测度.

例如, 定义 K_3 中的 Cantor 型三分集 C_3 如下:

首先, 取 $p=3$, $\beta\in K_3$, $|\beta|=3^{-1}$. 令

$$\begin{aligned}V_0&=D=\{x\in K_3:|x|\leqslant 1\},\\ V_1&=B^1=\left\{x\in K_3:|x|\leqslant 3^{-1}\right\},\\ V_2&=\left(1\cdot\beta^0+B^2\right)\bigcup\left(2\cdot\beta^0+B^2\right),\end{aligned}$$

……

令

$$C_3 = D\Big\backslash\bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j.$$

称 $C_3 = D\Big\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} V_j$ 为局部域上的 Cantor 型三分集. 于是

$$\begin{aligned}\mu C_3 =& \mu\left(D\Big\backslash\bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j\right) = \mu D - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j\right)\\ =& 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right) = 0,\end{aligned}$$

故局部域上的 Cantor 型三分集 C_3 的 Haar 测度为 0.

还可以举出局部域中其他集合以及定义在其上的函数. 作为今后分形分析的研究对象, 将局部域作为底空间, 并将这种函数及图形 "入住" 在局部域中, 则 Cantor 型三分集在 Hausdorff 维数 $s = \dim_H(C_3) = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ 之下, 其 Hausdorff 测度为 $H^s(C_3) = 1$ (参见 5.1 节).

1.2.9 局部域 K_q 与欧氏空间 $\mathbb{R}$ 的关系

在局部域与欧氏空间之间, 能否给出由 K_q 到 $\mathbb{R}$ 上的同胚映射? 下面以 K_p 为例.

设 K_p 的特征数为素数 $p \geqslant 2$, 取 K_p 的邻域基 $\{B^k : k \in \mathbb{Z}\}$,

$$B^k = \left\{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-k}\right\}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

且 $\forall x \in B^k, x \neq 0$, 有

$$x = x_k\beta^k + x_{k+1}\beta^{k+1} + \cdots,$$

其中 $x_k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}, x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$.

以 $p = 3$ 为例, 如图 1.2.1, 将 $[0,1)$ 区间分为三等分, 于是

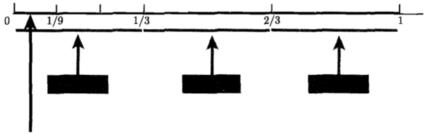
$$B^1 = \{x \in K_3 : |x| \leqslant 3^{-1}\} : \forall x \in B^1 \Rightarrow x = x_1\beta^1 + x_2\beta^2 + \cdots, \quad x_j \in \{0,1,2\},$$

$$B^2 = \{x \in K_3 : |x| \leqslant 3^{-2}\} : \forall x \in B^2 \Rightarrow x = x_2\beta^2 + x_3\beta^3 + \cdots, \quad x_j \in \{0,1,2\},$$

$$\cdots\cdots$$

且

$$\left[0, \frac{1}{3}\right) \leftrightarrow 0 \cdot \frac{1}{3} + B^2, \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} + B^2, \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right) \leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{3} + B^2.$$



$0\cdot 3^{-2}+B^3$: $\forall x\in B^3 \Longrightarrow x=x_3\beta^3+x_4\beta^4+\cdots,\ x_j\in\{0,1,2\}$

图 1.2.1

在 K_3 的拓扑下, B^k 是既开又闭且紧的集合, 而且在 3 进的 "有理点" 问题上存在无法统一的事实 (如图 1.2.2):

局部域 K_3		欧氏空间 $\mathbb{R}$
$1\cdot\beta^1+0\cdot\beta^2+\cdots\in 1\cdot\beta^1+B^2$	$\longleftrightarrow$	$1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{1}{3}$
$2\cdot\beta^2+2\cdot\beta^3+\cdots\in 0\cdot\beta^1+B^2$	$\longleftrightarrow$	$2\cdot\frac{1}{3^2}+2\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{1}{3}$

图 1.2.2

在局部域中, $\left(1\cdot\beta^1+B^2\right)\bigcap\left(0\cdot\beta^1+B^2\right)=\varnothing$, 故 $1\cdot\beta^1+0\cdot\beta^2+\cdots$ 与 $2\cdot\beta^2+2\cdot\beta^3+\cdots$ 在 K_3 中代表两个不同的点, 而在 $\mathbb{R}$ 中, 按照常规约定, 有理点就可以有两种表示: 有尽表示与无尽表示.

这正是局部域 K_p 的拓扑结构与欧氏空间 $\mathbb{R}$ 的一个不同之处. 因此, 不能指望在连续映射下将 K_p 中的问题化为 $\mathbb{R}$ 中的问题来解决. 科研成果表明, 以这两种拓扑结构所定义的空间作为底空间, 研究的对象实际上提供了研究客观世界的两种不同的工具: 宏观的与微观的. 这两种工具在自然科学领域中缺一不可 [4],[34].

思　考　题

1. 构造局部域 K_p 上的 Cantor 型 p 分集, 并求其 Haar 测度.
2. 在第 1 题的基础上, 构造 K_p 上的魔鬼阶梯.
3. 局部域 K_p 上是否能定义 Weierstrass 函数? 是否有像 Sierpinski 地毯、Sierpinski 垫片等类型的函数?
4. 考虑局部域 K_p 中的重要子集 D, D^*, B^k, $k\in\mathbb{N}$ 的 Haar 测度如何计算 (然后参看 2.3 节)?
5. 局部域 K_p 的乘群 K_p^* 上的拓扑结构、Haar 积分如何? 对应本书对于加群 K_p^+ 的讨论, 思考乘群 K_p^* 的相应问题.
6. 局部域 K_p 的有限代数扩域 $K_q, q=p^c, c\in\mathbb{N}$ 上的 Haar 积分的表示式如何?

第 2 章　局部域 K_p 的特征群 Γ_p

群的特征与特征群的概念在调和分析的研究中起着至关重要的作用. 本章从一般群的特征开始, 而后讨论局部域加群的特征群的结构.

2.1　局部紧群的特征群

2.1.1　群的特征

定义 2.1.1 (群的特征)　设 G 是一个群, 其运算记为 "·". 若 G 上的复值函数 $\chi: G \to \mathbb{C}$ 满足:

(i) $\forall x, y \in G \Rightarrow \chi(x \cdot y) = \chi(x)\chi(y)$;

(ii) $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in G \Rightarrow |\chi(x)| \leqslant M$, 且 $\chi(x) \neq 0$.

则称 χ 为 G 的一个特征 [26].

群的特征 $\chi(x)$ 有如下性质:

定理 2.1.1　设 $\chi: G \to \mathbb{C}$ 是群 G 的特征, 则它是群 G 到乘群

$$\mathbb{T} = \left\{ z = \mathrm{e}^{2\pi i x} \in \mathbb{C} : 0 \leqslant x < 1 \right\} \tag{2.1.1}$$

的非零同态, 即 G 上的复值函数 $\chi: G \to \mathbb{C}$ 满足:

(1) $\forall x, y \in G \Rightarrow \chi(x \cdot y) = \chi(x)\chi(y)$;

(2) $\forall x \in G \Rightarrow |\chi(x)| = 1$.

这个性质的证明留作练习.

2.1.2　局部紧群的特征

定义 2.1.2 (局部紧群的特征)　设 G 是一个局部紧 Abel 拓扑群, 简称局部紧群, 其运算为加法 $+$. 若 G 上复值函数 $\chi: G \to \mathbb{C}$ 满足:

(i) $\forall x_1, x_2 \in G \Rightarrow \chi(x_1 + x_2) = \chi(x_1)\chi(x_2)$; $\quad$ (2.1.2)

(ii) $\forall x \in G \Rightarrow |\chi(x)| = 1$. $\quad$ (2.1.3)

则称 χ 为 G 的一个特征.

由定理 2.1.1(2) 知 $\chi: G \to \mathbb{T}$, 这里

$$\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

是复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆周, 在乘法运算下成为一个群, 称为**圆周群**.

定义 2.1.3 (局部紧群的特征群 Γ_G) 设 G 是一个局部紧群, 其运算为加法 $+$. 记 G 上的连续特征 $\chi : G \to \mathbb{T}$ 的全体为

$$\Gamma_G = \{\chi : \chi \text{ 是 } G \text{ 上的连续特征}\}.$$

于是, 作为 G 到 $\mathbb{T}$ 上的同态, $\forall \chi \in \Gamma_G$, 有

$$\chi \in \Gamma_G \Rightarrow \chi(x_1 + x_2) = \chi(x_1)\chi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in G.$$

赋予 Γ_G 乘法运算 "$\times$":

$$\forall \chi_1, \chi_2 \in \Gamma_G \Rightarrow (\chi_1 \times \chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x), \quad \forall x \in G. \tag{2.1.4}$$

乘法 "$\times$" 简记为 "$\cdot$", $(\chi_1 \times \chi_2)(x) = (\chi_1 \cdot \chi_2)(x)$, 或 $(\chi_1 \times \chi_2)(x) = (\chi_1\chi_2)(x)$.

不难验证, 由 (2.1.4) 定义的乘法运算满足:

(i) 封闭性: $\forall \chi_1, \chi_2 \in \Gamma_G \Rightarrow \chi_1 \cdot \chi_2 \in \Gamma_G$;

(ii) 结合律: $\forall \chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \Gamma_G \Rightarrow (\chi_1 \cdot \chi_2) \cdot \chi_3 = \chi_1 \cdot (\chi_2 \cdot \chi_3)$;

(iii) 单位元: $\exists \chi \equiv I$, $I(x) = 1$, 使得 $\forall \chi \in \Gamma_G \Rightarrow \chi \cdot I = I \cdot \chi = \chi$;

(iv) 逆元: $\forall \chi \in \Gamma_G, \exists \chi^{-1} = \overline{\chi}$, 满足 $\chi^{-1} \in \Gamma_G$, 且

$$\chi \cdot \chi^{-1}(x) = \chi \cdot \overline{\chi}(x) = \chi(x) \cdot \overline{\chi}(x) = 1;$$

(v) 交换律: $\forall \chi_1, \chi_2 \in \Gamma_G \Rightarrow \chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_2 \cdot \chi_1$.

于是, Γ_G 在特征的乘法运算 "$\cdot$" 之下成为一个 Abel 群, 称其为 G 的*特征群* (也称为 G 的对偶群). 在一定的拓扑之下, Γ_G 也成为一个拓扑群.

2.1.3 Pontryagin 对偶定理

著名的 Pontryagin 对偶定理给出特征群 Γ_G 的刻画.

定理 2.1.2 设 G 是 T_2 型 Abel 拓扑群, Γ_G 是它的特征群.

(1) 若 G 是紧群, 则 Γ_G 是离散群; 若 G 是离散群, 则 Γ_G 是紧群;

(2) 若 G 是局部紧群, 则 Γ_G 也是局部紧群, 且 Γ_G 与 G 拓扑同构, 即 T_2 型局部紧 Abel 拓扑群是自对偶的.

这个定理的证明比较复杂, 且特征群的拓扑结构也需要用到更多的知识 [26], 这里从略. 对于局部域以及它的特征群的运算结构及拓扑结构都将在 2.2 节中给出.

2.1.4 例

1. $\mathbb{R}$ 的加群的特征与特征群 $\Gamma_\mathbb{R}$

先求 $\mathbb{R}$ 的加群的特征 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 及其特征群 $\Gamma_\mathbb{R}$.

$\forall\chi\in\Gamma_{\mathbb{R}}$，有 $\chi:x\in\mathbb{R}\to\chi(x)\in\mathbb{T}=\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\}$，且 χ 是连续映射. 据特征的定义 2.1.2, 存在常数 $h>0$, 使得 $\mathbb{R}$ 上的 Haar 积分 (即其上的 Lebesgue 积分)

$$\int_0^h \chi(x)\,\mathrm{d}x = c \neq 0$$

(否则, 若对于所有 $h>0$ 都有 $\int_0^h \chi(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则由 χ 的连续性, 必有 $\chi\equiv 0$, 与特征的定义矛盾). 于是

$$\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow \int_0^h \chi(x+t)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \chi(x)\chi(t)\,\mathrm{d}x = \chi(t)\int_0^h \chi(x)\,\mathrm{d}x = c\chi(t),$$

从而

$$\chi(t)=\frac{1}{c}\int_0^h \chi(x+t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_t^{t+h}\chi(u)\,\mathrm{d}u. \tag{2.1.5}$$

由实变函数的基本知识知, (2.1.5) 确定的 $\chi(t)$ 是连续可导的, 因此可对下式

$$\chi(x+t)=\chi(x)\chi(t)$$

关于 t 求导数, 得到

$$\chi'(x+t)=\chi(x)\chi'(t).$$

在上式中令 $t=0$, 得到

$$\chi'(x)=\chi(x)\chi'(0)\equiv a\chi(x),\quad a=\chi'(0)\neq 0.$$

从而得到特征 $\chi(x)$ 所满足的微分方程 (这就是众所周知的固有方程)

$$\chi' = a\chi.$$

显然, 上述微分方程的解为 $\chi(x)=\mathrm{e}^{ax}$. 又据特征的定义, 式 (2.1.3) 要求 $|\chi(x)|=1$, 故取 $a=2\pi\mathrm{i}$, 便得到一个特征 $\chi(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$.

为确定特征群 $\Gamma_{\mathbb{R}}$, 将 $\chi(x)\equiv 1$ 视为 $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 中的单位元

$$I(x)\equiv\chi(0\cdot x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot 0}=1.$$

对于自然数 $m\in\mathbb{N}$,

$$\chi_m(x)\equiv\chi(m\cdot x)=\chi(x+\cdots+x)=\underbrace{\chi(x)\cdots\chi(x)}_{m}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot m},$$

从而定义了 $\chi_m(x), m\in\mathbb{N}$.

对有理数 $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, 定义 $\chi_{\frac{m}{n}}(x)$ 为

$$\chi_{\frac{m}{n}}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{m}{n} x}.$$

最后, 由特征函数的连续性, $\forall y \in \mathbb{R}$, 取有理数序列 $\frac{m}{n} \to y \in \mathbb{R}$, 定义

$$\chi_y(x) = \lim_{\frac{m}{n} \to y} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{m}{n} x} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y x}. \tag{2.1.6}$$

这样得到 $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 中的所有元: $\chi_y(\cdot) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y \cdot} \in \Gamma_{\mathbb{R}}$, $y \in \mathbb{R}$, 使得 $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 与 $\mathbb{R}$ 形成同构 (定理 2.1.2):

$$\chi_y(\cdot) \in \Gamma_{\mathbb{R}} \leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

于是, 得到大家熟悉的 $\mathbb{R}$ 的特征群

$$\Gamma_{\mathbb{R}} = \{\chi_y(\cdot) : y \in \mathbb{R}\} = \left\{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y \cdot} : y \in \mathbb{R}\right\}. \tag{2.1.7}$$

2. 同余类 $\mathbb{Z}/p$ 的特征与特征群 $\Gamma_{\mathbb{Z}/p}$

如所周知, $\forall p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$, 同余类 $\mathbb{Z}/p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ 的 mod p 加群是一个有限的离散群, 因此其特征群 $\Gamma_{\mathbb{Z}/p}$ 是有限紧群.

设 $\mathbb{Z}/p$ 的特征为 $\chi : \mathbb{Z}/p \to \mathbb{T}$. 显然, $I : \mathbb{Z}/p \to \mathbb{T}$,

$$I(t) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} 0 \cdot t} = 1 \in \mathbb{T} \tag{2.1.8}$$

是一个特征, 因为 $|I(t)| = |\exp((2\pi \mathrm{i}/p) \cdot 0 \cdot t)| = 1$, 且 $I(t_1 + t_2) = I(t_1) I(t_2) = 1$.

为求出同余类 $\mathbb{Z}/p$ 的所有特征, $\forall t \in \mathbb{Z}/p$, 令

$$\chi_0(t) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} t}, \tag{2.1.9}$$

满足 $|\chi_0(t)| = \left|\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} t}\right| = 1$, 且当 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}/p$, $0 \leqslant t_1 + t_2 < p$ 时, 有

$$\chi_0(t_1 + t_2) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p}(t_1 + t_2)} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} t_1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} t_2} = \chi_0(t_1) \chi_0(t_2).$$

进而, $\forall k \in \mathbb{Z}/p$, 定义

$$\chi(k) \equiv \{\chi_0(t)\}^k = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} t}\right)^k = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} t k} = \chi_0(kt).$$

注意

$$\chi(k^t) = \chi\Big(\underbrace{t + t + \cdots + t}_{k}\Big) = \underbrace{\chi(t) \chi(t) \cdots \chi(t)}_{k} = \{\chi(t)\}^k.$$

于是, 由 mod p 运算规则得到

$$\Gamma_{\mathbb{Z}/p} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} \cdot 0}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} \cdot 1}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} \cdot 2}, \cdots, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} \cdot (p-1)}\right\} \subset \mathbb{T}. \tag{2.1.10}$$

2.2 K_p 的特征群 Γ_p

本节给出局部域 K_p 加群 K_p^+ 的特征 χ 及其特征群 $\Gamma_p \equiv \Gamma_{K_p^+}$ 的性质与结构. 本节主要参考文献是 [84].

2.2.1 Γ_p 的性质

定理 2.2.1 设 χ 是 K_p^+ 上的非平凡特征, $\chi \in \Gamma_p$, 即 $\chi \not\equiv 1$. 则存在整数 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 χ 在 B^k 上是平凡的, $\chi|_{B^k} = 1$.

证 由 χ 的连续性以及 $\{B^k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 K_p 的零元 $0 \in K_p$ 的基本邻域系, 于是, 对于 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得

$$|\chi(x) - \chi(0)| = |\chi(x) - 1| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall x \in B^k.$$

另一方面, $\forall\, l \in \mathbb{N}$ 与 $x \in B^k$, 由

$$|x| \leqslant p^{-k} \Rightarrow |lx| = \Bigg|\underbrace{x + \cdots + x}_{l}\Bigg| \leqslant \max\{|x|, \cdots, |x|\} = |x| \leqslant p^k \Rightarrow lx \in B^k,$$

得

$$lx = \underbrace{x + \cdots + x}_{l} \in B^k,$$

故 $\chi(lx) = \chi\Bigg(\underbrace{x + \cdots + x}_{l}\Bigg) = \chi^l(x)$, 也有

$$\left|(\chi(x))^l - 1\right| = |\chi(lx) - 1| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{2.2.1}$$

由上式得到 $\chi(x)|_{x \in B^k} = 1$. 因若不然, 将得到下面的矛盾.

事实上, 若 $\chi|_{B^k} \neq 1$, 则由 $\chi(x) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, 可设

$$\chi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

于是, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\dfrac{2\pi}{3} < n\theta < \dfrac{4\pi}{3}$, 且

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1\right| \geqslant \sqrt{3}. \tag{2.2.2}$$

(2.2.2) 式成立是因为: (2.2.2) 式等价于

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{-n\theta}\right) \geqslant 3$$

或

$$2\cos n\theta \leqslant -1.$$

由于 $\frac{2\pi}{3} < n\theta < \frac{4\pi}{3}$ 时, 有 $-1 \leqslant \cos n\theta \leqslant -\frac{1}{2}$, 故 (2.2.2) 式显然成立. 这与 (2.2.1) 式矛盾. 所以

$$\chi(x)\big|_{x\in B^k} = 1.$$

定理得证.

此定理中的 k 的最小值有很重要的意义与用途. 称它为 χ 的分歧阶.

定义 2.2.1 (分歧性、分歧阶、基本特征) K_p^+ 上的非平凡特征 $\chi \in \Gamma_p$ 的性质: 存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 χ 在 B^k 上平凡, $\chi|_{B^k} = 1$, 称为特征 χ 的**分歧性**(ramified property); 使 χ 在 B^k 上取值为 1 的最小整数 $k \in \mathbb{Z}$ 称为 χ 的**分歧阶**(degree of ramification).

由 Pontryagin 对偶定理, 局部域 K_p 的加群 K_p^+ 与其特征群 Γ_p 同构, 因此为了 "梳理" Γ_p, 取 K_p 的一个特征 $\chi \in \Gamma_p$, 使其在 $D = \{x \in K_p : |x| \leqslant 1\}$ 上平凡 (即在 D 上取值恒为 1, $\chi|_D \equiv 1$), 在 $B^{-1} = \{x \in K_p : |x| \leqslant p\}$ 上非平凡 (即在 B^{-1} 上不恒为 $1, \chi|_{B^{-1}} \not\equiv 1$), 由定理 2.2.1 知, 这样的 $\chi \in \Gamma_p$ 是存在的, 称这种特征为 "**基本特征**".

定理 2.2.2 若 $\chi \in \Gamma_p$ 在 B^k 为平凡的, 即 $\chi|_{B^k} \equiv 1$, 则 χ 在 B^k 的所有陪集

$$y + B^k, \quad y \in K_p \backslash B^k$$

上为常数.

证 事实上, $\forall x \in y + B^k$, 有

$$x = y + z, \quad y \in K_p \backslash B^k, \quad z \in B^k.$$

于是

$$\chi(x) = \chi(y+z) = \chi(y)\,\chi(z) = \chi(y), \quad y \in K_p \backslash B^k,\ z \in B^k.$$

定理得证.

下面的定理建立了 $\Gamma_p \leftrightarrow K_p$ 之间的一一对应.

定理 2.2.3 设 χ 是 K_p^+ 上的非平凡特征 $\chi \in \Gamma_p$, 即 $\chi \not\equiv 1$. 则对应关系

$$\lambda \in K_p \leftrightarrow \chi_\lambda \in \Gamma_p \tag{2.2.3}$$

由

$$\chi_\lambda(x) = \chi(\lambda x) \tag{2.2.4}$$

确定, 于是建立了 K_p 与 Γ_p 的拓扑同构, 并且有 $\Gamma_p = \{\chi_\lambda : \lambda \in K_p\}$.

证 首先证明由 (2.2.4) 式确定的 $\chi_\lambda : x \in K_p \to \chi_\lambda(x) = \chi(\lambda x)$ 是 K_p 上的特征, 因为

(1) $\forall\lambda\in K_p, \forall x\in K_p \Rightarrow \lambda x\in K_p \Rightarrow \chi_\lambda(x)=\chi(\lambda x)\in\mathbb{T}$;

(2) $\forall x_1,x_2\in K_p \Rightarrow \chi_\lambda(x_1+x_2)=\chi(\lambda(x_1+x_2))=\chi(\lambda x_1+\lambda x_2)$

$$=\chi(\lambda x_1)\chi(\lambda x_2)=\chi_\lambda(x_1)\chi_\lambda(x_2);$$

(3) χ_λ 的连续性与 $|\chi_\lambda(x)|=|\chi(\lambda x)|=1$ 都是显然的.

其次, 显见

$$\{\chi_\lambda:\lambda\in K_p\}\subset\Gamma_p, \tag{2.2.5}$$

且由 $\{\chi_\lambda:\lambda\in K_p\}\leftrightarrow K_p$ 知, $\{\chi_\lambda:\lambda\in K_p\}$ 是 Γ_p 的一维子空间.

然后证明 K_p 的加群的特征群 Γ_p 是一维的. 事实上, 对于 $\chi_1,\chi_2\in\Gamma_p$,

$$(\chi_1,\chi_2)\to\chi_1\chi_2$$

由 $(\chi_1\chi_2)(x)=\chi_1(x)\chi_2(x)$ 确定;

$$(\lambda,\chi)\to\chi_\lambda$$

由 $\chi_\lambda(x)=\chi(\lambda x)$ 确定.

记 $\Gamma_p\equiv(K_p)^\wedge$, 由 Pontryagin 对偶定理, 有

$$K_p\leftrightarrow(K_p)^\wedge\leftrightarrow\left((K_p)^\wedge\right)^\wedge. \tag{2.2.6}$$

若 $\Gamma_p=(K_p)^\wedge\equiv A^d$ 是 $d\in\mathbb{N}$ 维的, 其中 A 是一维的. 则 (2.2.6) 式给出

$$\left((K_p)^\wedge\right)^\wedge\equiv\left(A^d\right)^\wedge=\Big(\underbrace{A\times\cdots\times A}_{d}\Big)^\wedge=\underbrace{A^\wedge\times\cdots\times A^\wedge}_{d}=(A^\wedge)^d.$$

于是, 由 $A^d=\Gamma_p$ 与 (2.2.6) 式得

$$A^d=(K_p)^\wedge\leftrightarrow\left((K_p)^\wedge\right)^\wedge=A^{d^2}.$$

从而 $d=d^2\Rightarrow d=1$.

最后, 由 (2.2.5) 式得到 $\Gamma_p=\{\chi_\lambda:\lambda\in K_p\}$. 定理得证.

为给出特征群 Γ_p 的拓扑, 下面在局部域 K_p 加群的特征群 Γ_p 中引入 "零化子"(annihilator) 概念.

定义 2.2.2 (零化子) 称局部域 K_p 加群 K_p^+ 的特征群 Γ_p 中的子集

$$\Gamma^k=\{\chi\in\Gamma_p:\forall x\in B^k\Rightarrow\chi(x)=1\}$$

为 $B^k=\{x\in K_p:|x|\leqslant p^{-k}\}$ 的零化子.

定理 2.2.4 对于特征群 Γ_p, 下面结论成立:

(1) $\Gamma^k\subset\Gamma^{k+1}$, $k\in\mathbb{Z}$ 为特征群 Γ_p 中的递增的既开又闭的紧子集;

(2) $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\Gamma^k=\Gamma_p$, $\bigcap\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\Gamma^k=\{I\}$, I 是 Γ_p 的单位元;

(3) $\{\Gamma^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ 是特征群 Γ_p 的单位元 I 的邻域基, 使得 Γ_p 成为与局部域 K_p 加群 K_p^+ 同构的局部紧群;

(4) 局部紧群 Γ_p 可以赋于非阿基米德赋值

$$\chi_\lambda\in\Gamma_p\to|\lambda|\in p^k,\quad k\in\mathbb{Z},$$

使得

$$\Gamma^k=\left\{\chi_\lambda\in\Gamma_p:|\lambda|\leqslant p^k\right\},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

定理的证明是容易的, 留作练习.

下面讨论 K_p 为 p 级数域 S_p 与 p 进数域 A_p 两种情形下 Γ_p 的表示.

2.2.2　K_p 为 p 级数域 S_p 的情形

此时, S_p 的特征数为素数 $p\geqslant 2$.

1. 确定 p 级数域 S_p 的特征 $\chi\in\Gamma_{S_p}$

对 $\chi\in\Gamma_{S_p}$, 有 $\forall x\in S_p\Rightarrow|\chi(x)|=1$, 并且对任何 $j\in\mathbb{N}$, 总有

$$\chi(p\beta^{-j})=\chi\Big(\underbrace{\beta^{-j}+\cdots+\beta^{-j}}_{p}\Big)=\chi(0\cdot\beta^{-j})\equiv 1.\tag{2.2.7}$$

另一方面, 因

$$\chi(p\beta^{-j})=\chi\Big(\underbrace{\beta^{-j}+\cdots+\beta^{-j}}_{p}\Big)=\chi(\beta^{-j})\cdots\chi(\beta^{-j})=\chi(\beta^{-j})^p,$$

于是, 由 (2.2.7) 得

$$\chi(\beta^{-j})^p=1,\tag{2.2.8}$$

这表明 $\chi(\beta^{-j})$ 是方程 $z^p=1$ 的圆根, 从而 $\chi\left(\beta^{-j}\right),j\in\mathbb{Z}$, 取值为集合

$$\left\{1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}\cdot 1},\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}\cdot 2},\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}\cdot(p-1)}\right\}.\tag{2.2.9}$$

选取一个 "基本特征"(参见定理 2.2.1)

$$\chi\left(\beta^{-j}\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{p}}, & j=-1,\\ 1, & j\neq -1.\end{cases}\tag{2.2.10}$$

从 (2.2.10) 出发, 现在来确定特征 $\chi\in\Gamma_{S_p}$ 的表示.

若对 $x \in S_p$, 当 $x \in B^{s_0} \subset S_p$, $s_0 \leqslant 0$ 时, 据 1.2.6 节知

$$x = \sum_{s=s_0}^{+\infty} x_s \beta^s = x_{s_0}\beta^{s_0} + x_{s_0+1}\beta^{s_0+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + \cdots, \tag{2.2.11}$$

其中

$$x_s \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}, \quad s = s_0, s_0+1, \cdots. \tag{2.2.12}$$

则

$$\begin{aligned}\chi(x) =& \chi\left(\sum_{s=s_0}^{+\infty} x_s\beta^s\right) = \chi\left(\sum_{s=s_0}^{-2} x_s\beta^s + x_{-1}\beta^{-1} + \sum_{s=0}^{+\infty} x_s\beta^s\right) \\ =& \chi\left(x_{-1}\beta^{-1}\right) \prod_{s\neq -1} \chi\left(x_s\beta^s\right) = \chi\left(x_{-1}\beta^{-1}\right) \cdot 1 = \chi\left(\underbrace{\beta^{-1} + \cdots + \beta^{-1}}_{x_{-1}}\right) \\ =& \chi\left(\beta^{-1}\right)^{x_{-1}} = e^{\frac{2\pi i}{p} x_{-1}}.\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

令

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

(2.2.13) 式可写为

$$\chi(x) = \chi\left(\sum_{s=s_0}^{+\infty} x_s\beta^s\right) = \omega^{x_{-1}}, \quad x_{-1} \in \{0, 1, \cdots, p-1\}. \tag{2.2.14}$$

这便是 p 级数域 S_p 的一个特征.

下面给一个例子来确定 2 级数域 S_2 的特征.

取 $x \in S_2$, 则

$$x = x_{-s}\beta^{-s} + x_{-s+1}\beta^{-s+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + \cdots = \sum_{j=-s}^{-1} x_j\beta^j + z, \tag{2.2.15}$$

其中 $x_{-s} = 1, x_j \in \{0, 1\}, j = -s+1, \cdots, -1, z \in D = \{x \in K_2 : |x| \leqslant 1\}, |\beta| = 2^{-1}$.

定义基本特征为

$$\chi\left(\beta^k\right) = \begin{cases} -1, & k = -1, \\ 1, & k \neq -1. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\chi(x) =& \chi\left(\sum_{j=-s}^{-1} x_j\beta^j + z\right) = \chi(z)\chi\left(\sum_{j=-s}^{-1} x_j\beta^j\right) \\ =& \chi\left(x_{-s}\beta^{-s}\right)\chi\left(x_{-s+1}\beta^{-s+1}\right)\cdots\chi\left(x_{-1}\beta^{-1}\right) \\ =& (1)^{x_{-s}} \cdot (1)^{x_{-s+1}} \cdots (1)^{x_{-2}} \cdot (-1)^{x_{-1}} = (-1)^{x_{-1}}.\end{aligned}$$

对于 S_2, 有 $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p}} = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = -1$. 于是 (2.2.14) 式成为

$$\chi(x) = (-1)^{x_{-1}}.$$

这是 S_2 的一个特征的表示式.

2. 确定 p 级数域 S_p 的特征群 Γ_{S_p}

令

$$\lambda = \lambda_{-l}\beta^{-l} + \lambda_{-l+1}\beta^{-l+1} + \cdots + \lambda_{-1}\beta^{-1} + \lambda_0\beta^0 + \lambda_1\beta^1 + \cdots, \quad l \geqslant 0,$$

$$x = x_{-s}\beta^{-s} + x_{-s+1}\beta^{-s+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + \cdots, \quad s \geqslant 0,$$

其中 $x_j, \lambda_k \in \{0, 1, \cdots, p-1\} = GF(p)$, $j \geqslant -s$, $k \geqslant -l$.

另一方面, 因为定理 2.2.3 断言 $K_p \leftrightarrow \Gamma_p = \{\chi_\lambda : \lambda \in K_p\}$, 由对应关系 $\varphi : \lambda \in K_p \leftrightarrow \chi_\lambda \in \Gamma_p$ 确定, 且 $\chi_\lambda(x) = \chi(\lambda x)$, 故

$$\chi_\lambda(x) = \chi(\lambda x) = \mathrm{e}^{(\lambda x)_{-1}}, \tag{2.2.16}$$

其中 $(\lambda x)_{-1}$ 是 β^{-1} 的系数, 由乘积

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=-l}^{+\infty} \lambda_j\beta^j\right)\left(\sum_{j=-s}^{+\infty} x_j\beta^j\right)\\ &= \left(\lambda_{-l}\beta^{-l} + \lambda_{-l+1}\beta^{-l+1} + \cdots + \lambda_{-1}\beta^{-1} + \lambda_0\beta^0 + \lambda_1\beta^1 + \cdots\right)\\ &\quad \cdot \left(x_{-s}\beta^{-s} + x_{-s+1}\beta^{-s+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + \cdots\right)\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

确定的和式 (2.2.17) 式是一个有限和. 在 (2.2.17) 式中, β^{-1} 的系数是 $(\lambda x)_{-1} = \sum \lambda_{-1-j}x_j$.

于是可以确定 S_p 的特征群 Γ_{S_p} 为

$$\Gamma_{S_p} = \left\{\chi_\lambda : \chi_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p}(\lambda x)_{-1}},\ \lambda, x \in S_p\right\}. \tag{2.2.18}$$

2.2.3 K_p 为 p 进数域 A_p 的情形

此时, $K_p = A_p$, 其特征数为 ∞(即特征数为 0). 注意到, p 进数域 A_p 中的元的表示与 p 级数域 S_p 中的元的表示是相同的, 都是 $GF(p)$ 上的形式幂级数, 其差别是后者为不进位的按位 mod p 运算, 而前者为自左至右进位的按位 mod p 运算. 然而, 在特征群的情形却有很大的差别.

1. 确定 p 进数域 A_p 的特征 $\chi \in \Gamma_{A_p}$

对于 $x \in A_p$, 设 $x \in B^{s_0} \subset A_p$, $s_0 \leqslant 0$, 则

$$\begin{aligned} x &= \sum_{s=s_0}^{+\infty} x_s\beta^s = x_{s_0}\beta^{s_0} + x_{s_0+1}\beta^{s_0+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + \cdots \\ &= x_{s_0}\beta^{s_0} + x_{s_0+1}\beta^{s_0+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + z, \quad z \in D. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$x_{s_0}, x_{s_0+1}, \cdots \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, 于是

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \chi\left(x_{s_0}\beta^{s_0} + x_{s_0+1}\beta^{s_0+1} + \cdots + x_{-1}\beta^{-1} + z\right) \\ &= \chi\left(x_{s_0}\beta^{s_0}\right) \cdot \chi\left(x_{s_0+1}\beta^{s_0+1}\right) \cdots \chi\left(x_{-1}\beta^{-1}\right) \cdot \chi(z), \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

上式中, 最后一项为 $\chi(z) = 1$.

由于 A_p 中的加法是自左至右进位的按位 mod p 运算, 故

$$\chi(p\beta^{-j}) = \chi\Bigg(\underbrace{\beta^{-j} + \cdots + \beta^{-j}}_{p}\Bigg) = \chi(0 \cdot \beta^{-j} + \beta^{-j+1}) = \chi(\beta^{-j+1}); \tag{2.2.21}$$

对 $s = 0, 1, \cdots, p-1$, 有

$$\chi(s\beta^{-j}) = \chi\Bigg(\underbrace{\beta^{-j} + \cdots + \beta^{-j}}_{p}\Bigg) = \chi(\beta^{-j}) \cdots \chi(\beta^{-j}) = \chi(\beta^{-j})^s. \tag{2.2.22}$$

于是

$$\chi(p\beta^{-j}) = \chi(\beta^{-j+1}), \tag{2.2.23}$$

这表明 $\chi(\beta^{-j})$ 的 p 次幂将由第 “$-j$” 层 “提升” 到 “$-j+1$” 层, 因此必须将 “基本特征” 分为不同的级 (degree):

(1) 第一级. 选取第一级 “基本特征” 为

$$\chi\left(\beta^{-j}\right) = \begin{cases} e^{\frac{-2\pi i}{p}}, & j = -1, \\ 1, & j \neq -1. \end{cases}$$

则

$$\left\{1, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot 1}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot 2}, \cdots, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (p-1)}\right\} \subset \Gamma_{A_p}$$

构成 Γ_{A_p} 中的第一级 (first degree) 特征子群. $\forall x \in B^{-1}$,

$$x = x_{-1}\beta^{-1} + z, \quad z \in D,$$

有

$$\chi(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x_{-1}}, \quad x_{-1} \in \{0, 1, \cdots, p-1\}. \tag{2.2.24}$$

(2) 第二级. 选取第二级 "基本特征" 为

$$\chi\left(\beta^{-j}\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{p^2}}, & j=-2,\\ 1, & j\neq -2.\end{cases}$$

则

$$\left\{1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^2}\cdot 1},\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^2}\cdot 2},\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^2}\cdot(p^2-1)}\right\}\subset\Gamma_{A_p}$$

构成 Γ_{A_p} 中的第二级 (second degree) 特征子群. $\forall x\in B^{-2}$,

$$x=x_{-2}\beta^{-2}+x_{-1}\beta^{-1}+z,\quad z\in D,$$

有

$$\chi(x)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^2}(x_{-1}+x_{-2})},\quad x_{-1},x_{-2}\in\{0,1,\cdots,p-1\}. \tag{2.2.25}$$

(3) 第 k 级. 选取第 k 级 $(k>0)$"基本特征" 为

$$\chi\left(\beta^{-j}\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{p^k}}, & j=-k,\\ 1, & j\neq -k.\end{cases}$$

则

$$\left\{1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^k}\cdot 1},\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^k}\cdot 2},\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^k}\cdot(p^k-1)}\right\}\subset\Gamma_{A_p}$$

构成 Γ_{A_p} 中的第 k 级 (k-degree) 特征子群. $\forall x\in B^{-k}$,

$$x=x_{-k}\beta^{-k}+x_{-k+1}\beta^{-k+1}+\cdots+x_{-1}\beta^{-1}+z,\quad z\in D,$$

有

$$\chi(x)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^k}(x_{-1}+x_{-2}+\cdots+x_{-k})},\quad x_{-1},\cdots,x_{-k}\in\{0,1,\cdots,p-1\}. \tag{2.2.26}$$

这便是 p 进数域 A_p 的一个特征 (与 (2.2.14) 式比较).

下面给一个例子来确定 2 进数域 A_2 的特征.

取 $x\in A_2$, 则

$$x=x_{-s}\beta^{-s}+x_{-s+1}\beta^{-s+1}+\cdots+x_{-1}\beta^{-1}+x_0\beta^0+x_1\beta^1+\cdots=\sum_{j=-k}^{-1}x_j\beta^j+z, \tag{2.2.27}$$

其中 $x_{-k}=1,x_j\in\{0,1\},j=-k+1,\cdots,-1,k>0,\ z\in D,\ |\beta|=2^{-1}$. 则

$$\begin{aligned}\chi(x)=&\chi\left(\sum_{j=-k}^{-1}x_j\beta^j+z\right)=\chi(z)\chi\left(\sum_{j=-k}^{-1}x_j\beta^j\right)\\ =&\chi\left(x_{-k}\beta^{-k}\right)\chi\left(x_{-k+1}\beta^{-k+1}\right)\cdots\chi\left(x_{-1}\beta^{-1}\right)\\ =&(-1)^{x_{-k}+x_{-k+1}+\cdots+x_{-1}}.\end{aligned}$$

这是 A_2 的一个特征的表示式.

2. 确定 p 进数域 A_p 的特征群 Γ_{A_p}

类似地, 可以确定 A_p 的特征群 Γ_{A_p} 为

$$\Gamma_{A_p}=\left\{\chi_\lambda:\chi_\lambda(x)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^k}(\lambda\circ x)},\lambda,x\in A_p,k\in\mathbb{N}\right\},\tag{2.2.28}$$

其中

$$\lambda\circ x=\sum_{n=l}^{-k-1}x_n\left(\sum_{s=n}^{-k-1}\frac{\lambda_{-s}}{p^{s-n+1}}\right),$$

$$\lambda=\sum_{j=s}^{+\infty}\lambda_j\beta^j,\quad \lambda_j\in GF(p),\quad j=s,s+1,\cdots,$$

$$x=\sum_{j=l}^{+\infty}x_j\beta^j_,\quad x_j\in GF(p),\quad j=l,l+1,\cdots.$$

2.3 局部域 K_p 中的几个公式

在局部域分析中, 有关特征的几个重要公式起着关键的作用 [84].

2.3.1 K_p 中重要子集的 Haar 测度

首先, 给出 K_p 中的重要子集 (这些子集的定义见 1.2.2 节) 的 Haar 测度.

设 K_p 的 Haar 可测子集 $E\subset K_p$ 的示性函数为

$$\Phi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in K_p\backslash E.\end{cases}\tag{2.3.1}$$

于是, 集合 E 的 Haar 测度为

$$|E|=\int_E\mathrm{d}x=\int_{K_p}\Phi_E(x)\,\mathrm{d}x.\tag{2.3.2}$$

(1) $|D|=\int_D\mathrm{d}x=\int_{K_p}\Phi_D(x)\,\mathrm{d}x=1.$

由于 $D=\{x\in K_p:|x|\leqslant 1\}$, K_p 在非阿基米德赋值 $|x|$ 之下成为局部紧赋值域, 加群 K_p^+ 是局部紧群, 而 $D\subset K_p$ 是紧子群, 故可取此紧子群的 Haar 测度为 $|D|=1$.

(2) $|B|=\int_B\mathrm{d}x=\int_{K_p}\Phi_B(x)\,\mathrm{d}x=p^{-1}.$

由 (1.2.13) 式, 有

$$D/B=\left\{0\cdot\beta^0+B,1\cdot\beta^0+B,\cdots,(p-1)\cdot\beta^0+B\right\},$$

其中 $B \equiv B^1 = \{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-1}\}$, 且 $D = \bigcup_{j=0}^{p-1}(j \cdot \beta^0 + B)$, 而每个陪集

$$j \cdot \beta^0 + B, \quad j = 0, 1, \cdots, p-1$$

的 Haar 测度相等, 故由 $p|B| = |D|$ 得到 $|B| = p^{-1}$.

(3) $\int_{|x|=1} \mathrm{d}x = p\left(1 - p^{-1}\right)$.

由 $\{x \in K_p : |x| = 1\} = D \backslash B$ 得到, 这里 $D \backslash B$ 是集合 D 与 B 的差集.

(4) $\int_{B^k} \mathrm{d}x = p^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

由 $B^k = \{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-k}\}$ 与陪集关系 $B^k/B^{k+1} = \bigcup_{j=0}^{p-1}(j \cdot \beta^k + B^{k+1})$ 以及 (2) 得到.

(5) $\int_{|x|=p^{-k}} \mathrm{d}x = p^{-k}\left(1 - p^{-1}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

由 $\{x \in K_p : |x| = p^{-k}\} = B^k \backslash B^{k+1}$ 得到.

2.3.2 K_p 中关于特征的积分

以下是关于特征的积分表示. 选定 χ 为基本特征

$$\chi(x) \begin{cases} \equiv 1, & x \in D, \\ \not\equiv 1, & x \in K_p \backslash D, \end{cases}$$

使得 Γ_p 中的元都由 χ 出发来表示, 见 (2.2.18) 式与 (2.2.28) 式.

(1) $\int_D \chi(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

由于基本特征的选取, $\chi|_D = 1$, 故 $\int_D \chi(x)\mathrm{d}x = \int_D \mathrm{d}x = 1$. 然而, 对于任何特征 $\psi \in \Gamma_p$, 若 $\psi|_D$ 不恒等于 1, 则

$$\int_D \psi(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

这是因为:

设 $\psi|_D$ 不恒等于 1

$\Rightarrow \exists a \in D$, 使得 $\psi(a) \neq 1$

$\Rightarrow \int_D \psi(x) \, \mathrm{d}x = \int_D \psi(x+a) \, \mathrm{d}x = \int_D \psi(x) \psi(a) \, \mathrm{d}x = \psi(a) \int_D \psi(x) \, \mathrm{d}x$

$\Rightarrow (\psi(a) - 1) \int_D \psi(x) \, \mathrm{d}x = 0$

$$\Rightarrow \int_D \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(2) $\displaystyle\int_{B^{-k}} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant p^k} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p^k, & k \leqslant 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$

这是因为 $B^{-k} = \{x \in K_p : |x| \leqslant p^k\}$ 是 K_p 的子群, 故 $B^{-k} = \beta^{-k}D$,

$$k \leqslant 0 \Rightarrow B^{-k} = \beta^{-k}D \subseteq D \Rightarrow \chi|_{B^{-k}} \equiv 1,$$

$$k > 0 \Rightarrow B^{-k} = \beta^{-k}D \underset{\neq}{\supseteq} D \Rightarrow \chi|_{B^{-k}} \neq 1,$$

所以

$$\int_{B^{-k}} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \int_D \chi(\beta^{-k}t)\,|\beta^{-k}|\,\mathrm{d}t = \begin{cases} p^k, & k \leqslant 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

(3) $\displaystyle\int_{|x|=p^k} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p^k(1-p^{-1}), & k \leqslant 0, \\ -1, & k = 1, \\ 0, & k > 1 \end{cases}$

与

$$\int_{|x|=p^k} \overline{\chi}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p^k(1-p^{-1}), & k \leqslant 0, \\ -1, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

这是因为

$$\int_{|x|=p^k} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant p^k} \chi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leqslant p^{k-1}} \chi(x)\,\mathrm{d}x,$$

然后由 (2) 中的结果

$$\int_{B^{-k}} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant p^k} \chi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p^k, & k \leqslant 0, \\ 0, & k > 0 \end{cases}$$

得到. 第二个等式则由第一个等式右边为实值得到.

(4) $\displaystyle\int_{|x|=p^k} \chi_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p^k(1-p^{-1}), & k \leqslant -l, \\ -p^{-l}, & k = -l+1, \\ 0, & k > -l+1, \end{cases}$ 其中 $|\xi| = p^l$

与

$$\int_{|x|=p^k} \overline{\chi}_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p^k(1-p^{-1}), & k \leqslant -l, \\ -p^{-l}, & k = -l+1, \\ 0, & k > -l+1, \end{cases} \quad \text{其中 } |\xi| = p^l.$$

这是因为

$$\int_{|x|=p^k} \chi_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant p^k} \chi_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leqslant p^{k-1}} \chi_\xi(x)\,\mathrm{d}x,$$

对后两个积分作变换, 得

$$\int_{|x\xi|\leqslant p^{k+l}} \chi(x\xi)\,|\xi|\,\mathrm{d}x - \int_{|x\xi|\leqslant p^{k+l-1}} \chi(x\xi)\,|\xi|\,\mathrm{d}x$$

$$= p^l\left\{\int_{|\eta|\leqslant p^{k+l}} \chi(\eta)\,\mathrm{d}x - \int_{|\eta|\leqslant p^{k+l-1}} \chi(\eta)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

2.3.3 K_p 中几个函数的积分

本小节计算几个函数的 Haar 积分.

(1) 设 $f(x)=|x|^\alpha, x\in K_p$, 求积分 $\int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant 1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leqslant 1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{|x|=p^{-j}} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|=1} |x|^\alpha\mathrm{d}x + \int_{|x|=p^{-1}} |x|^\alpha\mathrm{d}x + \cdots + \int_{|x|=p^{-j}} |x|^\alpha\mathrm{d}x + \cdots \\
&= \int_{|x|=1} 1\mathrm{d}x + \int_{|x|=p^{-1}} p^{-\alpha}\mathrm{d}x + \cdots + \int_{|x|=p^{-j}} p^{-j\alpha}\mathrm{d}x + \cdots \\
&= \int_{|x|=1} \mathrm{d}x + p^{-\alpha}\int_{|x|=p^{-1}} \mathrm{d}x + \cdots + p^{-j\alpha}\int_{|x|=p^{-j}} \mathrm{d}x + \cdots \\
&= \left(1-p^{-1}\right) + p^{-\alpha}p^{-1}\left(1-p^{-1}\right) + \cdots + p^{-j\alpha}p^{-j}\left(1-p^{-1}\right) + \cdots \\
&= \left(1-p^{-1}\right)\left\{1+p^{-\alpha-1}+\cdots+p^{-j\alpha-j}+\cdots\right\} \\
&= \left(1-p^{-1}\right)\left\{1+p^{-(\alpha+1)}+\cdots+p^{-j(\alpha+1)}+\cdots\right\},
\end{aligned}$$

于是, 当 $\alpha>-1$ 时,

$$\int_D |x|^\alpha\,\mathrm{d}x = \left(1-p^{-1}\right)\frac{1}{1-p^{-(\alpha+1)}};$$

当 $\alpha\leqslant -1$ 时, 积分不存在.

类似地, 求积分 $\int_{|x|\geqslant 1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x&=\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{|x|=p^j}|x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{|x|=1}|x|^{\alpha}\mathrm{d}x+\int_{|x|=p}|x|^{\alpha}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{|x|=p^j}|x|^{\alpha}\mathrm{d}x+\cdots\\&=\int_{|x|=1}1\mathrm{d}x+\int_{|x|=p}p^{\alpha}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{|x|=p^j}p^{j\alpha}\mathrm{d}x+\cdots\\&=\int_{|x|=1}\mathrm{d}x+p^{\alpha}\int_{|x|=p^1}\mathrm{d}x+\cdots+p^{j\alpha}\int_{|x|=p^j}\mathrm{d}x+\cdots\\&=\left(1-p^{-1}\right)+p^{\alpha}p^1\left(1-p^{-1}\right)+\cdots+p^{j\alpha}p^j\left(1-p^{-1}\right)+\cdots\\&=\left(1-p^{-1}\right)\left\{1+p^{\alpha+1}+\cdots+p^{j(\alpha+1)}+\cdots\right\},\end{aligned}$$

于是, 当 $\alpha<-1$ 时,

$$\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\left(1-p^{-1}\right)\frac{1}{1-p^{(\alpha+1)}};$$

当 $\alpha\geqslant -1$ 时, 积分不存在.

(2) 设 $f(x)=\ln\frac{1}{|x|}, x\in K_p\setminus\{0\}$, 求积分 $\int_D f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{|x|\leqslant 1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leqslant 1}\ln\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x&=\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{|x|=p^{-j}}\ln\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{|x|=p^{-j}}\ln p^j\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{+\infty}(\ln p)\int_{|x|=p^{-j}}j\mathrm{d}x\\&=(\ln p)\sum_{j=1}^{+\infty}j\int_{|x|=p^{-j}}\mathrm{d}x=(\ln p)\sum_{j=1}^{+\infty}jp^{-j}\left(1-p^{-1}\right)\\&=(\ln p)\left(1-p^{-1}\right)\sum_{j=1}^{+\infty}jp^{-j}=(\ln p)\,p^{-1}\left(1-p^{-1}\right)^{-1}\\&=\frac{\ln p}{p\left(1-p^{-1}\right)}.\end{aligned}$$

思 考 题

1. 试证定理 2.1.1, 群的特征的性质定理.
2. 局部域 K_p 的乘群 K_p^* 上的特征、特征群如何?

3. 局部域 K_p 的有限代数扩域 $K_q, q=p^c, c\in\mathbb{N}$ 上的特征的表示式如何？特征群如何？
4. 试证定理 2.2.4.
5. 局部域 K_p 的有限代数扩域 $K_q, q=p^c, c\in\mathbb{N}$ 上的 Haar 积分的表示式如何？
6. 计算局部域 K_q 上的积分：

(1) 设 $f(x)=|x|^{\alpha}, x\in K_q$, 求积分 $\int_D f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{|x|\leqslant 1} f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 设 $f(x)=\ln\frac{1}{|x|}, x\in K_q\setminus\{0\}$, 求积分 $\int_D f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{|x|\leqslant 1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

第 3 章　局部域 K_p 上的调和分析

在第 1, 2 章的基础上, 本章介绍局部域 K_p 上的 Fourier 分析理论, 这是局部域上调和分析与分形分析的主要内容之一.

3.1　局部域 K_p 上的 Fourier 分析

设 $f: K_p \to \mathbb{C}$ 为 K_p 上 Haar 可测的复值函数.

$C \equiv C(K_p) = \{f: K_p \to \mathbb{C},\ f \text{ 连续}\}$;

$C_0 \equiv C_0(K_p) = \left\{f \in C(K_p): \lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0\right\}$;

$C_C \equiv C_C(K_p) = \{f \in C(K_p): \operatorname{supp} f \text{ 为 } K_p \text{ 中的紧集}\}$;

$L^r \equiv L^r(K_p), 1 \leqslant r \leqslant +\infty$ 为 K_p 上的 r 幂 Haar 可积函数的全体, 其中

$$L^r(K_p) = \left\{f: K_p \to \mathbb{C},\ \int_{K_p} |f(x)|^r \,\mathrm{d}x < +\infty\right\}, \quad 1 \leqslant r < +\infty,$$

$$L^\infty(K_p) = \left\{f: K_p \to \mathbb{C},\ \operatorname*{esssup}_{x \in K_p} |f(x)| < +\infty\right\}.$$

与 $\mathbb{R}^n$ 情形类似, 以上集合可赋予线性运算、拓扑结构, 使得它们成为完备赋范线性空间, 例如, 对于 $L^r \equiv L^r(K_p)$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, 范数定义为

$$\|f\|_r \equiv \|f\|_{L^r(K_p)} = \begin{cases} \left\{\displaystyle\int_{K_p} |f(x)|^r \mathrm{d}x < +\infty\right\}^{\frac{1}{r}}, & 1 \leqslant r < +\infty, \\ \operatorname*{esssup}\limits_{x \in K_p} |f(x)|, & r = +\infty, \end{cases}$$

这里 $\operatorname*{esssup}\limits_{x \in K_p} |f(x)| = \inf\limits_{me=0} \sup\limits_{x \in K_p \setminus e} |f(x)|$, 于是每个 $L^r(K_p), 1 \leqslant r \leqslant +\infty$ 成为一个 Banach 空间.

3.1.1　L^1 理论

本节介绍局部域上的 Fourier 分析的 L^1 理论 [1],[9],[84].

设 K_p 为局部域, K_p 的特征群为 $\Gamma_p = \{\chi_\xi : \xi \in K_p\}$, 由 2.2 节知, 二者拓扑同构, $\Gamma_p \overset{\text{拓扑同构}}{\longleftrightarrow} K_p$.

1. L^1 函数的 Fourier 变换

对于 $f \in L^1(K_p)$, 在抽象调和分析中, 定义

$$(Ff)(\xi) \equiv (Ff)(\chi_\xi) = \int_{K_p} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x, \quad \chi_\xi \in \Gamma_p$$

为 f 的 Fourier 变换.

$Ff(\chi_\xi)$ 是定义在 Γ_p 上的函数, 正如第 2 章所述, 通过映射

$$\chi_\xi \in \Gamma_p \longleftrightarrow \xi \in K_p,$$

特征群 Γ_p 与局部域 K_p 是拓扑同构的, 故以 $\xi \in K_p$ 代特征 $\chi_\xi \in \Gamma_p$, 并视 $\xi \in \Gamma_p$, 可把 $f \in L^1(K_p)$ 的 Fourier 变换定义为:

定义 3.1.1 (L^1 函数的 Fourier 变换)　对于 $f \in L^1(K_p)$, 称

$$f^\wedge(\xi) \equiv (Ff)(\xi) = \int_{K_p} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in \Gamma_p \tag{3.1.1}$$

为 f 的 Fourier变换.

例 3.1.1　设 $\alpha > -1$, 求函数 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换 $f^\wedge(\xi)$.

解　设 $|\xi| = p^l$, 求 $f^\wedge(\xi)$:

$$\begin{aligned} f^\wedge(\xi) &= \int_{K_p} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant 1} |x|^\alpha \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{|x|=p^k} |x|^\alpha \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{0} p^{k\alpha} \int_{|x|=p^k} \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{0} p^{k\alpha} I_k, \end{aligned}$$

其中

$$I_k = \begin{cases} p^k(1-p^{-1}), & k \leqslant -l, \\ -p^{-l}, & k = -l+1, \\ 0, & k > -l+1. \end{cases}$$

代入上式, 得到

$$f^\wedge(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-(1+\alpha)}}, & |\xi| \leqslant 1, \\ \dfrac{1-p^\alpha}{1-p^{-(1+\alpha)}} \cdot \dfrac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

例 3.1.2　求函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|x|}, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换 $f^\wedge(\xi)$.

解 依定义, 有

$$f^\wedge(\xi)=\int_{K_p}f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x=\int_{|x|\leqslant 1}\ln\frac{1}{|x|}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\ln p}{1-p^{-1}}p^{-1}, & |\xi|\leqslant 1,\\ \dfrac{\ln p}{1-p^{-1}}\cdot\dfrac{1}{|\xi|}, & |\xi|>1.\end{cases}$$

例 3.1.3 设 K_p 是局部域, $B^k=\left\{x\in K_p:|x|\leqslant p^{-k}\right\}$ 是以局部域零点为心、p^{-k} 为半径的"球", 其示性函数记为

$$\Phi_{B^k}(x)=\begin{cases}1, & x\in B^k,\\ 0, & x\in K_p\backslash B^k.\end{cases}\tag{3.1.2}$$

求 $(\Phi_{B^k})^\wedge(\xi)$.

解 由 2.3 节中的方法得

$$\begin{aligned}(\Phi_{B^k})^\wedge(\xi)&=\int_{K_p}\Phi_{B^k}(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x=\int_{B^k}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{|x|\leqslant p^{-k}}\overline{\chi}(\xi x)\mathrm{d}x=\int_{|\beta^{-k}x|\leqslant 1}\chi(-\xi x)\mathrm{d}x\\&=p^{-k}\int_{|\eta|\leqslant 1}\chi(-\xi\beta^k\eta)\mathrm{d}\eta=\begin{cases}p^{-k}, & |-\xi\beta^k\eta|\leqslant 1,\\ 0, & |-\xi\beta^k\eta|>1.\end{cases}\end{aligned}$$

于是, 当 $|\xi\beta^k\eta|=p^{-k}|\xi||\eta|\leqslant 1\Leftrightarrow|\xi||\eta|\leqslant p^k$ 时, 若 $|\xi|\leqslant p^k$, 则 $|\xi||\eta|\leqslant p^k$, 所以, 由 $\chi(-\xi\beta^k\eta)$ 在 $|-\xi\beta^k\eta|\leqslant 1$ 时平凡, 得 $\int_{|\eta|\leqslant 1}\chi(-\xi\beta^k\eta)\mathrm{d}\eta=1$, 故

$$|\xi|\leqslant p^k\Rightarrow(\Phi_{B^k})^\wedge(\xi)=p^{-k};$$

而当 $|\xi|>p^k$ 时, 总存在 $|\eta_0|<1$, 使得 $p^{-k}|\xi||\eta_0|>1$, 从而 $\chi\left(-\xi\beta^k\eta\right)$ 非平凡, 故积分为零. 于是

$$|\xi|>p^k\Rightarrow(\Phi_{B^k})^\wedge(\xi)=0.$$

综合上述, 得到

$$(\Phi_{B^k})^\wedge(\xi)=\begin{cases}p^{-k}, & |\xi|\leqslant p^k\\ 0, & |\xi|>p^k\end{cases}=p^{-k}\Phi_{\Gamma^k}(\xi).$$

下面给出平移算子、伸缩算子、反射算子的定义

定义 3.1.2 (平移、伸缩、反射) 对于定义在局部域 K_p 上的复值函数 $f:K_p\to\mathbb{C}$, 定义

(i) **平移算子** $\tau_h : f \to \tau_h f,\ h \in K_p$,

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h), \quad x \in K_p;$$

(ii) **伸缩算子** $\rho_s : f \to \rho_s f,\ s \in \mathbb{Z}$,

$$(\rho_s f)(x) = f(\beta^s x), \quad x \in K_p;$$

(iii) **反射算子** $\sim: f \to \widetilde{f}$,

$$\widetilde{f}(x) = f(-x), \quad x \in K_p.$$

以上所涉及的运算, 如 $x-h$, $\beta^s x$, 都是局部域 K_p 中的运算. 于是, 有

定理 3.1.1 对于函数 $f : K_p \to \mathbb{C}$ 的平移 τ_h、伸缩 ρ_s、反射 $\sim$ 的 Fourier 变换, 若 $f \in L^1(K_p)$, 则下列运算公式成立:

(1) $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = \overline{\chi}_h(\xi) f^\wedge(\xi),\ \xi \in \Gamma_p,\ h \in K_p$;

$(\chi_h(\cdot) f(\cdot))^\wedge(\xi) = \tau_h f^\wedge(\xi),\ \xi \in \Gamma_p,\ h \in K_p$;

(2) $(\rho_s f)^\wedge(\xi) = p^{-s} \rho_{-s} f^\wedge(\xi),\ \xi \in \Gamma_p,\ s \in \mathbb{Z}$;

(3) $\left(\widetilde{f}\right)^\wedge(\xi) = \overline{f^\wedge(\xi)},\ \overline{\left(\widetilde{f}\right)^\wedge(\xi)} = (\overline{f})^\wedge(\xi),\ \xi \in \Gamma_p$.

证 先证性质 (1) 中的第一个公式:

$$\begin{aligned}(\tau_h f)^\wedge(\xi) &= \int_{K_p} \tau_h f(x) \overline{\chi}_\xi(x) \mathrm{d}x = \int_{K_p} f(x-h) \overline{\chi}_\xi(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{K_p} f(y) \overline{\chi}_\xi(y+h) \mathrm{d}y = \int_{K_p} f(y) \overline{\chi}_\xi(y) \overline{\chi}_\xi(h) \mathrm{d}y \\ &= \overline{\chi}_\xi(h) \int_{K_p} f(y) \overline{\chi}_\xi(y) \mathrm{d}y = \overline{\chi}_\xi(h) f^\wedge(\xi) = \overline{\chi}_h(\xi) f^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

下证性质 (1) 中的第二个公式:

$$\begin{aligned}(\chi_h(\cdot) f(\cdot))^\wedge(\xi) &= \int_{K_p} \chi_h(x) f(x) \overline{\chi}_\xi(x) \mathrm{d}x = \int_{K_p} f(x) \chi(-\xi x) \chi(hx) \mathrm{d}x \\ &= \int_{K_p} f(x) \chi(hx - \xi x) \mathrm{d}x = \int_{K_p} f(x) \chi((h-\xi)x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{K_p} f(x) \overline{\chi}_{\xi-h}(x) \mathrm{d}x = f^\wedge(\xi - h) = (\tau_h f^\wedge)(\xi).\end{aligned}$$

为证性质 (2), 任取 $s \in \mathbb{Z}$, 于是

$$\begin{aligned}(\rho_s f)^\wedge(\xi) &= \int_{K_p} (\rho_s f)(x) \overline{\chi}_\xi(x) \mathrm{d}x = \int_{K_p} f(\beta^s x) \overline{\chi}_\xi(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{K_p} f(\beta^s x) \chi(-\xi x) \mathrm{d}y = \int_{K_p} f(\eta) \chi(-\xi \beta^{-s} \eta) p^s \mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

$$= p^s \int_{K_p} f(\eta)\overline{\chi}_{\beta^{-s}\xi}(\eta)\mathrm{d}\eta = p^s f^\wedge(\beta^{-s}\xi) = p^s \rho_{-s} f^\wedge(\xi).$$

性质 (3) 的证明留作练习.

例 3.1.3 中的示性函数 $\Phi_{B^k}(x)$ 在 Fourier 分析中有重要作用, 下面研究其性质.

定理 3.1.2 $\Phi_{B^k}(x)$ 的平移 τ_h, $\tau_h\Phi_{B^k}(x) = \Phi_{h+B^k}(x)$ 是 K_p 上的连续函数.

证 $\Phi_{h+B^k}(x)$ 是 K_p 中以 $h \in K_p$ 为心、p^{-k} 为半径的球 $h + B^k$ 的示性函数

$$\Phi_{h+B^k}(x) = \Phi_{B^k}(x-h) = \tau_h\Phi_{B^k}(x) \equiv \tau_h\Phi_k(x), \tag{3.1.3}$$

由

$$\tau_h\Phi_{B^k}(x) = \Phi_{h+B^k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in h + B^k, \\ 0, & x \notin h + B^k, \end{cases}$$

当 $x_0 \in h + B^k$ 时, 利用局部域中两个球之间的位置关系定理 (定理 1.2.5) 知

$$x_0 + B^k \subset h + B^k.$$

于是, 只要 $x \in x_0 + B^k \subset h + B^k$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 必有

$$|\tau_h\Phi_{B^k}(x) - \tau_h\Phi_{B^k}(x_0)| = |1-1| = 0 < \varepsilon;$$

当 $x_0 \notin h + B^k$ 时, 同理 (定理 1.2.5) 知 $\exists x_0 + B^s$, 使得

$$x_0 + B^s \bigcap h + B^k = \varnothing,$$

故 $\tau_h\Phi_{B^k}(x_0) = 0$. 于是, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in x_0 + B^s$, 有

$$|\tau_h\Phi_{B^k}(x) - \tau_h\Phi_{B^k}(x_0)| = |0-0| = 0 < \varepsilon.$$

$\tau_h\Phi_{B^k}(x) = \Phi_{h+B^k}(x)$ 的连续性得证.

定理 3.1.3 对于 $\Phi_{B^k}(x)$、平移 $\tau_h\Phi_{B^k}$ 与伸缩 $\rho_s\Phi_{B^k}$, 它们的 Fourier 变换有如下运算公式:

(1) $(\Phi_{B^k})^\wedge(\xi) = p^{-k}\Phi_{\Gamma^k}(\xi)$, $\xi \in \Gamma_p$, $k \in \mathbb{Z}$;

(2) $(\tau_h\Phi_{B^k})^\wedge(\xi) = p^{-k}\overline{\chi}_h(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)$, $\xi \in \Gamma_p$, $h \in K_p$, $k \in \mathbb{Z}$;

(3) $(\rho_s\Phi_{B^k})^\wedge(\xi) = p^s\rho_{-s}\Phi_{B^k}^\wedge(\xi)$, $\xi \in \Gamma_p$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

证明留作练习.

2. 检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$

下面定义局部域 K_p 上一个重要的函数类: 检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$[72], 为完成局部域上的 Fourier 变换理论作准备.

首先给出检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 的定义与性质.

定义 3.1.3 (局部域 K_p 的检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$) 称

$$\mathbb{S}(K_p)=\left\{\varphi:K_p\to\mathbb{C},\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j\tau_{h_j}\Phi_{B^{k_j}}(x),c_j\in\mathbb{C},h_j\in K_p,k_j\in\mathbb{Z},1\leqslant j\leqslant n\right\} \tag{3.1.4}$$

为局部域 K_p 的检验函数类, 其中的元 $\varphi(x)$ 称为检验函数.

类似地, 可定义 Γ_p 上的检验函数类 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 但由于 K_p 与 Γ_p 是拓扑同构的, 因此, 两个检验函数类就可视为等同的.

定理 3.1.4 对于检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$, 有如下性质:

(1) $\mathbb{S}(K_p)$ 是由球的示性函数平移的有限线性组合所组成的具有紧支集的区分点的连续函数的代数;

(2) $\mathbb{S}(K_p)$ 连续嵌入到空间 $C_0(K_p)$ 与 $L^r(K_p)$, $1\leqslant r<+\infty$ 中, 且 $\mathbb{S}(K_p)$ 在 $C_0(K_p)$ 与 $L^r(K_p)$, $1\leqslant r<+\infty$ 中稠密.

证 对于 (1), 首先证明每个 $\varphi(x)=\tau_h\Phi_{B^k}(x)\in\mathbb{S}(K_p)$ 是具有紧支集的连续函数.

事实上, 由 (3.1.2), 对于 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\Phi_{B^k}(x)=\begin{cases}1, & x\in B^k,\\ 0, & x\in K_p\backslash B^k,\end{cases}$$

故其支集 B^k 为紧集. 对于 $h\in K_p$, 若 $h\in B^k$, 则 $h+B^k=B^k$,

$$\varphi(x)=\tau_h\Phi_{B^k}(x)=\Phi_{B^k}(x),$$

断言成立. 若 $h\in K_p\backslash B^k$, 则

$$\tau_h\Phi_{B^k}(x)=\Phi_{B^k}(x-h)=\begin{cases}1, & x\in h+B^k,\\ 0, & x\notin h+B^k\end{cases}$$

显然也具有紧支集. 函数的连续性由定理 3.1.2 得到.

其次证 $\mathbb{S}(K_p)$ “区分点”[2], 即

$$\forall x_1,x_2\in K_p,x_1\neq x_2\Rightarrow\exists\varphi\in\mathbb{S}(K_p),\ \text{s.t. }\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2).$$

事实上, 对于 $\forall x_1, x_2 \in K_p, x_1 \neq x_2$, 据定理 1.2.5, 存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得

$$(x_1 + B^k) \bigcap (x_2 + B^k) = \varnothing.$$

则 $\varphi = \tau_{x_1}\Phi_{B^k}(x)$ 就是所求的函数 (注意, 这样的函数并不唯一).

再证明 $\mathbb{S}(K_p)$ 是一个代数, 即 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的三种运算: 加法 +、数乘 $\alpha\cdot, \alpha \in \mathbb{C}$、乘法 × 满足

① 关于+, $\mathbb{S}(K_p)$ 成为一个线性空间;

② 关于+, ×, $\mathbb{S}(K_p)$ 成为具有单位元的环;

③ 关于$\alpha\cdot$, ×, 满足结合律 $\alpha \cdot (\varphi_1 \times \varphi_2) = (\alpha \cdot \varphi_1) \times \varphi_2 = \varphi_1 \times (\alpha \cdot \varphi_2)$.

这是容易验证的.

对于 (2), 据 Stone-Weierstrass 定理 [2], (设 X 是 T_2 型局部紧拓扑空间, $C_C(X)$ 是具紧支集连续函数的 Banach 代数, 单位元为 I; $A \subset C(X)$ 是 $C_C(X)$ 的含单位元的子代数, $I \in A$. 则 $\overline{A} = C_C(X)$ 当且仅当 A 区分 X 的点), 取 $X = K_p$, $C_C(X) = C_C(K_p)$, 且 $A = \mathbb{S}(K_p)$, 得到 $\overline{\mathbb{S}(K_p)} = C_C(K_p)$; 进而得 $\overline{C_C(K_p)} = C_0(K_p)$, $\overline{C_0(K_p)} = L^r(K_p)$, $1 \leqslant r < +\infty$.

定理 3.1.5 对于检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 有如下等价性质: $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 当且仅当存在唯一的整数对 $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 使 φ 在 B^k 的陪集上为常数, 并以 B^l 为支集, $\text{supp}\varphi = B^l$.

证 必要性. 设 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的表示式为

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \tau_{h_j} \Phi_{B^{k_j}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \Phi_{B^{k_j}}(x - h_j),$$

$$c_j \in \mathbb{R},\ h_j \in K_p,\ k_j \in \mathbb{Z},\quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

令 $h_j \in B^{r_j}$, 且 $|h_j| = p^{-r_j}$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 于是, 对于 $l = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, 显然有

$$\text{supp } \varphi = B^l.$$

另一方面, 令 $k = \max\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$, 则

$$h_j + B^k \subset h_j + B^{k_j} \subset B^l. \tag{$*$}$$

($*$) 式的第一个包含关系是因为 $k > h_j$; 第二个包含关系是因为 $h_j \in B^{r_j} \subset B^l$.

这里, ($*$) 式蕴含一个关系: $k \geqslant l$. 作 B^k 在 B^l 中的所有陪集所成的集 $\{B^l/B^k\}$. ($*$) 式表明, 每个 $h_j + B^k$ 都是 $\{B^l/B^k\}$ 中的一个陪集, 而 $\Phi_{B^{k_j}}$ 的平移与线性组合 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \tau_{h_j} \Phi_{B^{k_j}}(x)$ 在这些陪集上取常数.

充分性. 设 $\varphi(x)$ 的支集为 B^l, $\operatorname{supp}\varphi = B^l$, 且在 B^k 的陪集上取常数. 显然, $k \geqslant l$. 记陪集所成的集为 $\{B^l/B^k\}$, 则

$$\{B^l/B^k\} = \{B^k, \beta^{k-1}+B^k, \cdots, (p-1)\beta^{k-1}+B^k; \cdots;$$

$$\beta^l + B^k, \cdots, (p-1)\beta^l + B^k\},$$

其中的陪集 $A_j \in \{B^l/B^k\}$ 都是形如

$$A_j = b_j + B^k, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

的集, 且 $\varphi|_{A_j} = \alpha_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$, m 为有限数, $|b_j| = p^{-r_j}$, $b_j \in B^{r_j}$, $k \geqslant r_j \geqslant l$. 于是, $\varphi(x)$ 可写成 $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \Phi_{b_j+B^k}(x)$, 这就是要证明的.

定义 3.1.4 ($\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的指标对) 称定理 3.1.5 中的整数对 (k, l) 为 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的*指标对*.

下面讨论检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 的运算结构与拓扑结构.

显然, 在加法运算 $+$:

$$\varphi,\ \psi \in \mathbb{S}(K_p) \Rightarrow (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad x \in K_p$$

与数乘运算 $\alpha\cdot$:

$$\varphi \in \mathbb{S}(K_p),\ \alpha \in \mathbb{C} \ \Rightarrow\ (\alpha \cdot \varphi)(x) = \alpha\, \varphi(x), \quad x \in K_p$$

之下, $\mathbb{S}(K_p)$ 成为一个线性空间.

定义 3.1.5 (检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 的拓扑结构) 赋予检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 以如下拓扑: 称 $\mathbb{S}(K_p)$ 中的序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{S}(K_p)$ 为*"零序列"*, 若

(i) 对所有 $\varphi_n(x) \in \mathbb{S}(K_p)$, 存在一个共同的指标对 (k, l);

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 0$ 对 $x \in K_p$ 一致成立.

在定义了 $\mathbb{S}(K_p)$ 中的零序列后, $\mathbb{S}(K_p)$ 成为一个拓扑线性空间.

定理 3.1.6 检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 在定义 3.1.5 的拓扑下成为一个完备的可分的拓扑线性空间.

证 完备性易证. 可分性: $\mathbb{S}(K_p)$ 的子集

$$\mathbb{S}_r(K_p) = \left\{ \varphi \in \mathbb{S}(K_p) : \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \tau_{h_j} \Phi_{B^{k_j}}(x),\ c_j \in \mathbb{Q} \right\},$$

这里 $\mathbb{Q}$ 为有理数集合, 则 $\mathbb{S}_r(K_p)$ 是可数集, 且 $\mathbb{S}_r(K_p)$ 在 $\mathbb{S}(K_p)$ 中稠密, 故 $\mathbb{S}(K_p)$ 是可分的.

以讨论检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的 Fourier 变换的分析性质作为本小节的结束.

由定理 3.1.4, $\mathbb{S}(K_p)\subset L^1(K_p)$, 故 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的 Fourier 变换由 (3.1.1) 式定义

$$\varphi^{\wedge}(\xi)\equiv(F\varphi)(\xi)=\int_{K_p}\varphi(x)\overline{\chi}_{\xi}(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in\Gamma_p.$$

定理 3.1.7 (1) 检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$ 中函数 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的 Fourier 变换 $\varphi^{\wedge}(\xi)$ 是 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 中的函数, 且 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的 Fourier 变换 $F:\mathbb{S}(K_p)\to\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 是 $\mathbb{S}(K_p)$ 到 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 的一一的拓扑同构映射;

(2) 若 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的指标对为 (k,l), 则 $\varphi^{\wedge}$ 的指标对为 $(-l,-k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 即 $\varphi^{\wedge}$ 在 B^{-l} 的陪集上为常数, 并以 B^{-k} 为支集, $\operatorname{supp}\varphi^{\wedge}=B^{-k}$.

证 对于 (1), 由定理 3.1.3(2) 可知 $(\tau_h\Phi_{B^k})^{\wedge}(\xi)\in\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 的有限线性组合的也属于 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$; 映射 $F:\mathbb{S}(K_p)\to\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 的双方单值、双方连续性可由定理 3.1.2 与定理 3.1.3(1) 与 (2) 得到.

对于 (2), 设 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的指标对为 (k,l). 首先对于 $\varphi(x)=\Phi_{B^k}(x)$, 由定理 3.1.3(1) 与 (2) 得

$$(\Phi_{B^k})^{\wedge}(\xi)=p^{-k}\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\ \text{与}\ (\tau_h\Phi_{B^k})^{\wedge}(\xi)=p^{-k}\overline{\chi}_h(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi),$$

显然, 它们的支集为 Γ^k. 于是, 只要说明特征 $\overline{\chi}_h(\xi)$ 在陪集集合 $\{\Gamma^k/\Gamma^l\}$ 中的每个陪集上取常数就够了, 而这由特征的定义, $\overline{\chi}_h(\xi)=\overline{\chi}(h\xi)$ 与定理 2.2.2 便可得到.

其次, 当 $\varphi(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\tau_{h_j}\Phi_{B^{k_j}}(x)$ 时, 由有限线性组合, 有 $\varphi^{\wedge}\in\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 且只需取 $k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$, $l=\min\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$, 其中 r_j 由 $|h_j|=p^{-r_j},1\leqslant j\leqslant n$, 确定, 便可得到其指标对为 $(-l,-k)$. 定理得证.

上述定理可简单表示为

$$F:\begin{bmatrix}\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\\(k,l)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\varphi^{\wedge}\in\mathbb{S}(\Gamma_p)\\(-l,-k)\end{bmatrix}. \tag{3.1.5}$$

3. 卷积算子、k 截断算子

卷积有重要的物理意义: 若一个线性系统的脉冲响应为 $h(t)$, 进入系统的输入信号为 $f(t)$, 试问输出信号是什么?

$$f(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow g(t)$$

由物理知识可知, 输入信号 $f(t)$ 在进入系统时有时滞 $t-\tau$, 因此经过系统时, 与脉冲响应混频, 得到的输出信号为

$$g(t)=f*h(t)=\int f(\tau-t)h(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

因此卷积在信号分析中起重要作用. 与经典情形类似, 可以定义局部域 K_p 上的卷积算子.

定义 3.1.6 (卷积算子) 设 $f,g:K_p\to\mathbb{C}$ 为两个 Haar 可测函数, 称

$$(f*g)(x)=\int_{K_p}f(x-z)g(z)\mathrm{d}z=\int_{K_p}f(z)g(x-z)\mathrm{d}z \tag{3.1.6}$$

为 f 与 g 的卷积.

再次提醒, 卷积的定义与 $\mathbb{R}^n$ 上卷积定义的形式是类似的, 但是, 其中的运算, 例如"$-$", 是局部域 K_p 中的减法运算.

关于卷积及其 Fourier 变换, 有

定理 3.1.8 若 $f\in L^1(K_p)$, $g\in L^r(K_p)$, $1\leqslant r<+\infty$, 则

(1) 封闭性: $f*g\in L^r(K_p)$, 且 $\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_1\|g\|_r$;

(2) 结合律: $(f*g)*h=f*(g*h)$;

(3) 交换律: $f*g=g*f$;

(4) 卷积公式: $(f*g)^\wedge=f^\wedge g^\wedge$, $r=1$;

(5) Parseval 公式: $\displaystyle\int_{K_p}f(x)g^\wedge(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}f^\wedge(x)g(x)\mathrm{d}x$, $r=1$.

证 关于 (1) ~ (4) 的证明可由定义与实变函数中的定理与技巧得到. 对于 (5), 也由 Fubini 定理交换积分次序得到.

k 截断算子的意义在于: 它提供了 $g\in L_{\mathrm{loc}}(K_p)$ 在 K_p 上积分的一种近似. 与经典情形相比较, 它相当于那里的磨光算子 (Fredrich 软化子).

定义 3.1.7 (k 截断算子) 对于 $f\in L_{\mathrm{loc}}(K_p)$ 与 $k\in\mathbb{Z}$, 称算子

$$\Lambda_k f=\int_{K_p}f(x)\Phi_{B^{-k}}(x)\mathrm{d}x=\int_{B^{-k}}f(x)\mathrm{d}x \tag{3.1.7}$$

为 k 截断算子, 简称截断算子, $\Lambda_k:L_{\mathrm{loc}}(K_p)\to\mathbb{C}$.

截断算子 Λ_k 的性质如下:

定理 3.1.9 若 $f\in L^1(K_p)$, 则

(1) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\Lambda_k f=\int_{K_p}f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)=\frac{1}{|B^k|}\int_{x+B^k}f(t)\mathrm{d}t=p^k\int_{x+B^k}f(t)\mathrm{d}t\equiv f_k(x)$;

(3) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x)=f(x)$, a.e. $x\in K_p$.

证 对于 (1), 由定义

$$\Lambda_k f=\int_{K_p}f(x)\Phi_{B^{-k}}(x)\mathrm{d}x=\int_{B^{-k}}f(x)\mathrm{d}x,$$

即得

$$\lim_{k\to+\infty}\Lambda_k f=\lim_{k\to+\infty}\int_{B^{-k}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}f(x)\mathrm{d}x.$$

对于 (2), 有

$$\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)=\int_{K_p}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\Phi_{B^{-k}}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{K_p}f^\wedge(\xi)\left\{\chi_x(\xi)\Phi_{B^{-k}}(\xi)\right\}\mathrm{d}\xi,$$

由定理 3.1.8(5), 上式化为

$$\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)=\int_{K_p}f(\xi)\left\{\chi_x(\cdot)\Phi_{B^{-k}}(\cdot)\right\}^\wedge(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{$*$}$$

令 $g(\eta)\equiv\chi_x(\eta)\Phi_{B^{-k}}(\eta)$, 由定理 3.1.1 中的公式, $(\chi_h(\cdot)f(\cdot))^\wedge(\xi)=(\tau_hf^\wedge)(\xi)$ 与定理 3.1.3(1), $(\Phi_{B^{-k}})^\wedge(\xi)=p^k\Phi_{\Gamma^{-k}}(\xi)$, 便得

$$\begin{aligned}(g(\cdot))^\wedge(\xi)&=\left\{\chi_x(\cdot)\Phi_{B^{-k}}(\cdot)\right\}^\wedge(\xi)=(\tau_x\left\{\Phi_{B^{-k}}(\cdot)\right\}^\wedge)(\xi)\\&=\tau_x\left\{p^k\Phi_{\Gamma^{-k}}(\xi)\right\}=p^k\Phi_{\Gamma^{-k}}(\xi-x).\end{aligned}$$

代入 $(*)$ 式, 并由 $\Phi_{\Gamma^{-k}}=\Phi_{B^k}$ 得

$$\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)=\int_{\Gamma_p}f(\xi)p^k\Phi_{\Gamma^{-k}}(\xi-x)\mathrm{d}\xi=p^k\int_{x+B^k}f(t)\mathrm{d}t\equiv f_k(x),$$

(2) 得证.

下面给出 (3) 的证明要点:

设 $f_k(x)=p^k\displaystyle\int_{x+B^k}f(t)\mathrm{d}t,\ \varphi_k(x)=p^k\int_{x+B^k}\varphi(t)\mathrm{d}t$, 有

① 若 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 则对足够大的 $k\in\mathbb{N}$, $\varphi_k(x)=\varphi(x)$;

② 若 $f\in L_{\mathrm{loc}}(K_p)$, 则只需对 $f\in L^1(K_p)$ 进行证明, 因为可令

$$f_1(t)=(\tau_x\Phi_0)(t)f(t)=\Phi_0(t-x)f(t),$$

从而 $f_1\in L^1(K_p)$;

③ 对于 $f_1\in L^1(K_p)$, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $g\in\mathbb{S}(K_p)$, 使得 $\|f_1-g\|_1<\varepsilon$;

④ 对于 $f\in L^1(K_p)$, 由③, $f-f_k=(f-g)-(f-g)_k$, 且

$$0\leqslant\limsup|f(x)-f_k(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+\limsup|(f-g)_k|;$$

⑤ $\forall\ \delta>0$, 令

$$E=\left\{x\in K_p:\limsup|f(x)-f_k(x)|>\delta\right\},$$

则

$$E\subset\left\{x\in K_p:|f(x)-g(x)|>\frac{\delta}{2}\right\}\bigcup\left\{x\in K_p:\limsup|(f-g)_k(x)|>\frac{\delta}{2}\right\}\equiv E_1\bigcup E_2;$$

⑥ $|E_1|=\int_{K_p}\Phi_{E_1}(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1}1\cdot\mathrm{d}x\leqslant\int_{K_p}\frac{2}{\delta}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\delta}\|f-g\|_1,$

$$\begin{aligned}|E_2|&=\left|\left\{x\in K_p:\limsup|(f-g)_k(x)|>\frac{\delta}{2}\right\}\right|\\&=\left|\left\{x\in K_p:\limsup\left|p^k\int_{|x-z|\leqslant p^{-k}}(f-g)(z)\mathrm{d}x\right|>\frac{\delta}{2}\right\}\right|\\&\leqslant\left|\left\{x\in K_p:\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|p^k\int_{|x-z|\leqslant p^{-k}}(f-g)(z)\mathrm{d}x\right|>\frac{\delta}{2}\right\}\right|\\&\leqslant\left|\left\{x\in K_p:\mathrm{M}(f-g)(x)>\frac{\delta}{2}\right\}\right|\leqslant\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-1}\|f-g\|_1=\frac{2}{\delta}\|f-g\|_1,\end{aligned}$$

由此得到

$$|E|\leqslant|E_1|+|E_2|\leqslant\frac{4}{\delta}\|f-g\|_1<\frac{4}{\delta}\varepsilon,$$

固定 δ, 令 $\varepsilon\to 0$, 得到 $|E|=0$, 此即 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_k(x)=f(x)$, a.e. $x\in K_p$, 或

$$\lim_{k\to+\infty}\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x)=f(x),\ \text{a.e. } x\in K_p.$$

在上述 6 条得证之后, 定理 3.1.9(3) 得证.

4. L^1-Fourier 变换的性质与逆 Fourier 变换

下面研究 L^1-Fourier 变换的性质与逆 Fourier 变换及其性质.

定理 3.1.10 对于 L^1-Fourier 变换, 有如下分析性质:

(1) 映射 $F:f\to f^\wedge$ 是 $L^1(K_p)$ 到 $L^\infty(\Gamma_p)$ 的范数非增有界线性变换, 即

线性: $(f+g)^\wedge\to f^\wedge+g^\wedge$; $(\alpha f)^\wedge\to\alpha f^\wedge$, $\alpha\in\mathbb{C}$ 为常数;

有界性、范数非增性: $\|f^\wedge\|_{L^\infty(\Gamma_p)}\leqslant\|f\|_{L^1(K_p)}$;

(2) $f\in L^1(K_p)$, 则 $f^\wedge(\xi)$ 是 $\xi\in\Gamma_p$ 的一致连续函数;

(3) $f\in L^1(K_p)$, 则 $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty}f^\wedge(\xi)=0$ (Riemann-Lebesgue 引理);

(4) 若 $f\in L^1(K_p),f^\wedge\in L^1(\Gamma_p)$, 则 $f(x)=\int_{\Gamma_p}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi$, a.e. $x\in K_p$;

(5) 若 $f,g\in L^1(K_p)$, 且 $g^\wedge\in L^1(\Gamma_p)$, 则 $\int_{K_p}f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{\Gamma_p}f^\wedge(\xi)\overline{g^\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi$ (乘积公式).

证 线性、有界性、范数非增性是明显的. 为证性质 (2), 任取 $h\in\Gamma_p$, 由

$$\begin{aligned}f^\wedge(\xi+h)-f^\wedge(\xi)&=\int_{K_p}f(x)\overline{\chi}_{\xi+h}(x)\mathrm{d}x-\int_{K_p}f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{K_p}f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\overline{\chi}_h(x)\mathrm{d}x-\int_{K_p}f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{K_p}f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\left[\overline{\chi}_h(x)-1\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 $f\in L^1$, $\left|\overline{\chi}_\xi(x)\right|=1$, $\overline{\chi}_h(x)=\overline{\chi}(hx)$ 的连续性, 以及 $\lim\limits_{h\to0}\overline{\chi}_h(x)=1$, 于是, 由 Lebesgue 控制收敛定理得到

$$\lim_{h\to0}\{f^\wedge(\xi+h)-f^\wedge(\xi)\}=0.$$

性质 (2) 得证.

对于性质 (3), 首先, 对 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\subset L^1(K_p)$, 有 $\varphi^\wedge\in\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 具有紧支集, 故

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\varphi^\wedge(\xi)=0$$

成立.

其次, 对于 $f\in L^1(K_p)$, 任给 $\varepsilon>0$, 由稠密性, 存在 $g_\varepsilon\in\mathbb{S}(K_p)$, 使得

$$\|f-g_\varepsilon\|_{L^1(K_p)}<\varepsilon.$$

注意到 $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon)^\wedge$ 为紧集, 为证 $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty}f^\wedge(\xi)=0$, 只需考虑 $x\notin\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon$ 时,

$$|f^\wedge(\xi)|=|(f-g_\varepsilon)^\wedge(\xi)|\leqslant\|(f-g_\varepsilon)^\wedge\|_{L^\infty(\Gamma_p)}\leqslant\|f-g_\varepsilon\|_{L^1(K_p)}\leqslant\varepsilon,$$

由此得到 $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty}f^\wedge(\xi)=0$.

为证 (4), 由 $f^\wedge\in L^1(\Gamma_p)$, 考虑 k 截断算子

$$\begin{aligned}\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x)&=\int_{\Gamma_p}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\overline{\int_{\Gamma_p}\overline{f^\wedge(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)}\overline{\chi}_x(\xi)\mathrm{d}\xi}\end{aligned}$$

可视为

$$G_k(\xi)\equiv\overline{f^\wedge(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)}=\overline{f^\wedge(\xi)}\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\in L^1(\Gamma_p)$$

的 Fourier 变换取共轭

$$\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x)=\overline{G_k^\wedge(x)}.$$

因此, 由本定理的 (1), 则 $\forall k$, $\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x)$ 是 $x\in K_p$ 上的一致连续函数. 于是, 极限函数 $\lim\limits_{k\to+\infty}\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x)$ 存在、连续, 且

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x) &= \lim_{k\to+\infty}\int_{\Gamma_p} f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_{\Gamma^k} f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\Gamma_p} f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

另一方面, 由 $f\in L^1(K_p)$, 据定理 3.1.9(3),

$$\lim_{k\to+\infty}\Lambda_k(f^\wedge\chi_x)(x) = f(x),\ \text{a.e.},\ x\in K_p.$$

这就给出了本定理的 (4),

$$f(x) = \int_{\Gamma_p} f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \text{a.e.},\ x\in K_p.$$

为证 (5), 利用 Fubini 定理与 (4)

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_p} f^\wedge(\xi)\overline{g^\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_{\Gamma_p}\left[\int_{K_p} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\right]\overline{g^\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{K_p} f(x)\left[\overline{\int_{\Gamma_p} g^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi}\right]\mathrm{d}x = \int_{K_p} f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定理得证.

由 $\mathbb{S}(K_p)\subset L^1(K_p)$, 以上定理中的性质对于 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 都成立.

为讨论 L^1-Fourier 变换的逆变换, 先讨论检验函数类 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 中函数的 Fourier 逆变换.

定义 3.1.8 ($\psi\in\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 的 Fourier 逆变换)　对于 $\psi\in\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 称

$$\psi^\vee(x)\equiv F^{-1}\psi(x) = \int_{\Gamma_p}\psi(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad x\in K_p \tag{3.1.8}$$

为 ψ 的 Fourier 逆变换.

于是, 有

$$F:\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\to\varphi^\wedge\in\mathbb{S}(\Gamma_p)\ 与\ F^{-1}:\psi\in\mathbb{S}(\Gamma_p)\to\psi^\vee\in\mathbb{S}(K_p),$$

由于 $K_p\overset{同构}{\longleftrightarrow}\Gamma_p$, 故 Fourier 变换 F 与逆变换 F^{-1} 都是 $\mathbb{S}(K_p)$ 到 $\mathbb{S}(K_p)$ 的映射, 从而

$$\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\varphi^\wedge\in\mathbb{S}(\Gamma_p)\overset{同构}{\longleftrightarrow}\mathbb{S}(K_p),$$

并且成立

$$(\varphi^{\wedge})^{\vee} = \varphi = (\varphi^{\vee})^{\wedge}, \quad \varphi \in \mathbb{S}(K_p).$$

例 3.1.4 设 $\Phi_{\Gamma^k}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Gamma^k, \\ 0, & \xi \in \Gamma_p \setminus \Gamma^k. \end{cases}$ 求 $(\Phi_{\Gamma^k})^{\vee}(x)$.

解 由

$$\begin{aligned}(\Phi_{\Gamma^k})^{\vee}(x) &= \int_{\Gamma_p} \Phi_{\Gamma^k}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi = \overline{\int_{\Gamma^k} \overline{\Phi_{\Gamma^k}(\xi)}\overline{\chi}_x(\xi)\mathrm{d}\xi} \\ &= \overline{\int_{\Gamma^k} \Phi_{\Gamma^k}(\xi)\overline{\chi}_x(\xi)\mathrm{d}\xi} = \overline{p^k\Phi_{B^k}(x)} = p^k\Phi_{B^k}(x),\end{aligned}$$

于是

$$(\Phi_{\Gamma^k})^{\vee}(x) = p^k\Phi_{B^k}(x).$$

回顾定理 3.1.7, Fourier 变换 $F: \mathbb{S}(K_p) \to \mathbb{S}(\Gamma_p)$ 是一一的映上的同胚映射. 由 $F: \varphi \to \varphi^{\wedge}$ 与 $F^{-1}: \psi \to \psi^{\vee}$ 定义, 定理 3.1.7, 以及 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p) \subset L^1(K_p)$, $\varphi^{\wedge} \in \mathbb{S}(\Gamma_p) \subset L^1(\Gamma_p)$ 与定理 3.1.10(4), 得到

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma_p} \varphi^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x \in K_p,$$

由于 $\varphi(x)$ 的连续性, 上式处处成立. 于是,

$$\begin{bmatrix} \varphi \in \mathbb{S}(K_p) \\ (k,l) \end{bmatrix} \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} \varphi^{\wedge} \in \mathbb{S}(\Gamma_p) \\ (-l,-k) \end{bmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{bmatrix} \varphi = (\varphi^{\wedge})^{\vee} \in \mathbb{S}(K_p) \\ (k,l) \end{bmatrix}. \tag{3.1.9}$$

现在讨论 L^1-Fourier 变换的逆变换与反演公式.

定义 3.1.9(L^1 函数的 Fourier 逆变换) 对于 $g \in L^1(\Gamma_p)$, 称

$$g^{\vee}(x) \equiv F^{-1}g(x) = \int_{\Gamma_p} g(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x \in K_p$$

为 g 的 Fourier 逆变换.

注意到, $K_p \overset{1-1}{\underset{\text{iso.}}{\longleftrightarrow}} \Gamma_p$, 故通常也将 Fourier 逆变换写为

$$g^{\vee}(x) = \int_{K_p} g(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x \in K_p. \tag{3.1.10}$$

例 3.1.5 求函数 $g(\xi) = \begin{cases} \ln\dfrac{1}{|\xi|}, & 0 < |\xi| \leqslant 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases}$ 的 Fourier 逆变换.

解 求 $g^{\vee}(x)$:

$$g^{\vee}(x)=\int_{\Gamma_p} g(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{0<|\xi|\leqslant 1}\ln\frac{1}{|\xi|}\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\ln p}{1-p^{-1}}\dfrac{1}{p}, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{\ln p}{1-p^{-1}}\dfrac{1}{|x|}, & |x|>1.\end{cases}$$

下面是有关 Fourier 变换的反演公式.

定理 3.1.11 对于 $f, f^{\wedge}$, 有

(1) $f(x)\in L^1(K_p)$ 几乎处处等于一个连续函数, 即存在 $g\in C(K_p)$, 使得

$$f(x)=g(x),\ \text{a.e. } x\in K_p;$$

(2) $f\in L^1(K_p), f^{\wedge}\in L^1(\Gamma_p)$, 则 Fourier 变换的反演公式成立:

$$f(x)=\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \text{a.e. } x\in K_p,$$

即 $f, f^{\wedge}\in L^1\Rightarrow (f^{\wedge})^{\vee}=f$, 特别地, $\varphi,\ \varphi^{\wedge}\in\mathbb{S}$, 有 $(\varphi^{\wedge})^{\vee}=\varphi$;

(3) 若 $f\in L^1(K_p)$, $f^{\wedge}\geqslant 0$, 且 f 在 $x=0$ 连续, 则 $f^{\wedge}\in L^1(\Gamma_p)$, 且反演公式成立:

$$f(x)=\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad \text{a.e. } x\in K_p,$$

特别地, $f(0)=\displaystyle\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi$.

证 (1) 由 $\overline{C(K_p)}=L^1(K_p)(C(K_p)$ 在 $L^1(K_p)$ 中稠密) 得到. (2) 就是定理 3.1.10(4). 为证 (3), 首先证明: 条件"$f\in L^1(K_p)$, $f^{\wedge}\geqslant 0$, 且 f 在 $x=0$ 连续"蕴含"$f^{\wedge}\in L^1(\Gamma_p)$".

事实上, 据定理 3.1.10(1), $f\in L^1(K_p)\Rightarrow f^{\wedge}\in C(\Gamma_p)$, 且 $f^{\wedge}$ 在 Γ_p 上一致连续. 由 $f^{\wedge}\geqslant 0$, 利用 Fatou 引理与定理 3.1.9(3), 以及 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 得到

$$0\leqslant\int_{\Gamma_p}|f^{\wedge}(\xi)|\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p}\lim_{k\to+\infty} f^{\wedge}(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\mathrm{d}\xi=\varliminf_{k\to+\infty}\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\chi_0(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $\chi_0(\xi)\equiv 1$. 由 k 截断算子的定义,

$$\int_{\Gamma_p} f^{\wedge}(\xi)\chi_0(\xi)\Phi_{\Gamma^k}(\xi)\mathrm{d}\xi=\Lambda_k(f^{\wedge}\chi_0),$$

前式化为

$$0 \leqslant \int\limits_{\Gamma_p} |f^\wedge(\xi)|\mathrm{d}\xi \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \Lambda_k(f^\wedge\chi_0) = \lim_{k\to+\infty} \Lambda_k(f^\wedge\chi_0) = f(0) < +\infty,$$

故 $f^\wedge \in L^1(\Gamma_p)$. 然后再由定理 3.1.10(4), 就得到 (3). 定理得证.

Fourier 变换法的依据 —— Fourier 变换的唯一性定理如下：

定理 3.1.12 若 $f, g \in L^1(K_p)$, 且 $f^\wedge = g^\wedge$, 则 $f = g$, a.e..

证 据定理 3.1.11, 作如下推理：由

$$f^\wedge = g^\wedge \Rightarrow (f-g)^\wedge = 0,$$

得

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \int_{\Gamma_p} (f^\wedge - g^\wedge)(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\Gamma_p} (f-g)^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi = 0, \text{ a.e..} \end{aligned}$$

定理得证.

5. H-L 极大算子 M

定义 3.1.10 (Hardy-Littlewood 极大算子 M) 对于 $g \in L_{\mathrm{loc}}(K_p)$, 定义算子

$$Mg(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{p^{-k}} \int_{x+B^k} |g(z)|\mathrm{d}z = \sup_{\substack{x\in S \\ S:K_p\text{中的球}}} \frac{1}{|S|}\int_S |g(t)|\mathrm{d}t,$$

称 $M: g \to Mg$ 为 Hardy-Littlewood 极大算子.

下面先叙述一个称为 Wiener 的覆盖引理, 但不加证明.

定理 3.1.13[84] 若 $E \subset K_p$ 是具有限 Haar 测度的可测子集, 又 $\{S_\alpha\}$ 是 E 的球覆盖, 即 S_α 为 K_p 中的球, 且 $\bigcup\limits_\alpha S_\alpha \supset E$. 则对于任给的 η, $0<\eta<1$, 存在有限个互不相交的球 $\{S_k\}_{k=1}^N$, 满足

$$\sum_{k=1}^N |S_k| > \eta|E|.$$

Hardy-Littlewood 极大算子有如下性质：

定理 3.1.14 若 $f \in L^1(K_p)$, $\lambda > 0$, 则

$$|\{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1, \tag{3.1.11}$$

即 H-L 极大算子 M 是弱 (1,1) 型算子.

证 对于 $\lambda>0$, 令 $E=\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda\}$. 取 E 的 Haar 测度为有限值的任一可测子集 E_1, $E_1\subset E$, $|E_1|<+\infty$.

$\forall x\in E_1$, 存在球 S_x, 满足 $x\in S_x$, 且由 $f\in L^1(K_p)$, $\lambda>0$, 得

$$\int_{K_p}|f(t)|\mathrm{d}t>\lambda|S_x|. \tag{3.1.12}$$

于是, $\forall x\in E_1$, 有 $Mf(x)=\sup\limits_{\substack{x\in S\\ S:K_p\text{中的球}}}\dfrac{1}{|S|}\displaystyle\int_S|f(t)|\mathrm{d}t>\lambda$. 据此, 必存在 S_x, 使得

$$\frac{1}{|S_x|}\int_{S_x}|f(t)|\mathrm{d}t>\lambda. \tag{3.1.13}$$

这样, 球族 $\{S_x\}_{x\in E_1}$ 满足覆盖定理 3.1.13 的条件, $\bigcup\limits_{x\in E_1}S_x\supset E_1$. 因此, 任给 $\eta>0$, 且 $0<\eta<1$, 则存在有限子族 $\{S_1,S_2,\cdots,S_N\}\subset\{S_x\}_{x\in E_1}$, 其中的球互不相交, 且

$$\sum_{k=1}^N|S_k|>\eta|E_1|.$$

联合式 (3.1.12)、式 (3.1.13), 得

$$\eta|E_1|<\sum_{k=1}^N|S_k|<\sum_{k=1}^N\frac{1}{\lambda}\int_{S_k}|f|\leqslant\frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

在上式中, 令 $\eta\to1$, 得到

$$|E_1|\leqslant\frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{3.1.14}$$

为证式 (3.1.11), 用反证法. 对于 $f\in L^1(K_p)$, 若存在 $\lambda_0>0$, 使得

$$|E_0|=|\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda_0\}|=+\infty.$$

于是, $\forall\lambda>\lambda_0$, 包含关系 $\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda\}\supset\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda_0\}$ 给出

$$|\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda\}|\geqslant|\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda_0\}|=+\infty.$$

另一方面, $\forall N_0>0$, 存在足够大的球 S_x, $x\in E_0$, 使得 $|S_x|>N_0$, 并且在 S_x 上有 $|f(x)|>\lambda_0$ (否则, 若 $\forall x\in E_0$, 都有 $|f(x)|\leqslant\lambda_0$, 则 $M|f|(x)\leqslant\lambda_0$, 与 $x\in E_0$ 矛盾), 故

$$\|f\|_1>\int_{S_x}|f|>\lambda_0|S_x|>\lambda_0N_0,$$

而此式与 $f\in L^1(K_p)$ 矛盾. 于是

$$|E|=|\{x\in K_p: Mf(x)>\lambda\}|<+\infty.$$

式 (3.1.14) 中的 $E_1\subset E$ 是 E 的任意具有限测度的可测子集, 对于 E 也成立, 于是由 $|E|\leqslant\dfrac{\|f\|_1}{\lambda}$ 证明了式 (3.1.11), 定理得证.

3.1.2 L^2 理论

本节介绍 Fourier 分析的 L^2 理论 [1],[9],[84].

1. L^2 函数的 Fourier 变换

首先给出一个定理.

定理 3.1.15 若 $f \in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$, 则 $\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2$.

证 对于 $f \in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$, 令

$$g(x) = \overline{f(-x)},$$

则 $g \in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$, 且

$$\begin{aligned} g^\wedge(\xi) &= \int_{K_p} \overline{f(-x)}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_{K_p} f(-x)\chi_\xi(x)\mathrm{d}x} \\ &= \overline{\int_{K_p} f(t)\chi_\xi(-t)\mathrm{d}t} = \overline{\int_{K_p} f(t)\overline{\chi}_\xi(t)\mathrm{d}t} = \overline{f^\wedge(\xi)}. \end{aligned}$$

于是, 由定理 3.1.8(1), (4), 有

$$\begin{aligned} f,\ g \in L^1(K_p) &\Rightarrow f * g \in L^1(K_p) \\ &\Rightarrow (f*g)^\wedge = f^\wedge g^\wedge = f^\wedge \overline{f^\wedge} = |f^\wedge|^2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

另一方面, 我们断言

$$f,\ g \in L^2(K_p) \Rightarrow\ f * g \in C(K_p). \tag{3.1.16}$$

其实, 据 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} |f*g(x+y) - f*g(x)| &= \left|\int_{K_p} [f(x+y-z) - f(x-z)]\, g(z)\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \left\{\int_{K_p} |f(x+y-z) - f(x-z)|^2\,\mathrm{d}z\right\}^{\frac12} \left\{\int_{K_p} |g(z)|^2\,\mathrm{d}z\right\}^{\frac12} \\ &= \|f(\cdot+y) - f(\cdot)\|_2\, \|g\|_2\,. \end{aligned}$$

于是, 当 $y \to 0$ 时, 由 L^2 平均连续性, 得 $\|f(\cdot+y) - f(\cdot)\|_2\,\|g\|_2 = o(1)$, $y \to 0$. 这蕴含

$$\lim_{y\to0}\{f*g(x+y) - f*g(x)\} = 0,$$

即 $f*g$ 连续.

于是, 由 (3.1.15) 与 (3.1.16), 对于卷积 $f*g$, 有以下性质:

① $(f*g)^\wedge = |f^\wedge|^2 \geqslant 0$;

② $f*g \in L^1(K_p)$;

③ $f*g$ 连续.

据定理 3.1.11(3), 得到 $(f*g)^\wedge \in L^1(\Gamma_p)$, 且

$$(f*g)(0) = \int_{K_p} g(0-z)f(z)\mathrm{d}z = \int_{K_p} \overline{f(-(0-z))}f(z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_{K_p} \overline{f(z)}f(z)\mathrm{d}z = \int_{K_p} |f(z)|^2\mathrm{d}z.$$

另一方面, 因 $g^\wedge(z) = \overline{f^\wedge(z)}$,

$$(f*g)(0) = \int_{\Gamma_p} (f*g)^\wedge(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_p} f^\wedge(z)g^\wedge(z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\Gamma_p} f^\wedge(z)\overline{f^\wedge(z)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_p} |f^\wedge(z)|^2\mathrm{d}z,$$

这样得到 $\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2$, 定理得证.

现在可以定义 $f \in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换了.

定义 3.1.11 (L^2 函数的 Fourier 变换)　设 $f \in L^2(K_p)$, 令 $F_k(x) = f(x)\Phi_{B^{-k}}(x)$, 称 $F_k(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 截断函数, $k \in \mathbb{Z}$. 显然, $F_k \in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$. 于是

$$(F_k)^\wedge(\xi) = \int_{K_p} F_k(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant p^k} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x.$$

若存在一个函数 $F \in L^2(\Gamma_p)$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty} \left\{\int_{\Gamma_p} |F(\xi) - (F_k)^\wedge(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

记为

$$F(\xi) = \underset{k\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\,(F_k)^\wedge(\xi),$$

这里 $\underset{k\to+\infty}{\text{l.i.m.}}$ 是指当 $k \to +\infty$ 时的 L^2 平均极限 (limit in the mean), 则称此 F 为 $f \in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换, 仍记为 $F = f^\wedge$, 即定义

$$f^\wedge(\xi) = \underset{k\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\,(F_k)^\wedge(\xi) = \underset{k\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{|x|\leqslant p^k} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x,\quad \xi \in \Gamma_p \tag{3.1.17}$$

为 $f \in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换. 清楚地说, $f \in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换 $f^\wedge$ 满足

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| f^\wedge(\xi) - \int_{|x|\leqslant p^k} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \right\|_{L^2(\Gamma_p)} = 0.$$

定理 3.1.16 $f \in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换有如下算子性质:

(1) 映射 $F: f \to f^\wedge$ 是 $L^2(K_p)$ 到 $L^2(\Gamma_p)$ 的线性映射, 即线性: $(f+g)^\wedge \to f^\wedge + g^\wedge$; $(\alpha f)^\wedge \to \alpha f^\wedge$, $\alpha \in \mathbb{C}$ 为常数;

(2) $L^2(K_p)$ 上的 Fourier 变换具有保范性, 即

$$\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2\,;$$

(3) 映射 $F: f \to f^\wedge$ 是 $L^2(K_p)$ 到 $L^2(\Gamma_p)$ 上的同构 (isomorphism), 即一一的映上的双方连续的;

(4) 若 $f, g \in L^2(K_p)$, 则 $f^\wedge$, $g^\wedge$ 成立 Parseval 公式

$$\int_{K_p} f(x) g^\wedge(x)\mathrm{d}x = \int_{K_p} f^\wedge(x) g(x)\mathrm{d}x;$$

(5) $L^2(K_p)$ 上的 Fourier 变换是 U 变换, 即乘积公式

$$\int_{\Gamma_p} f^\wedge(\xi)\overline{g^\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{K_p} f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x,$$

这个等式中的左、右两边分别是 $L^2(\Gamma_p)$ 与 $L^2(K_p)$ 的内积: $(f^\wedge,\ g^\wedge) = (f, g)$.

证 (1) $L^2(K_p)$ 上的 Fourier 变换的线性是明显的.

(2) 为证 $L^2(K_p)$ 上的 Fourier 变换 $F: f \to f^\wedge$ 是保范的, 由定理 3.1.15 有

$$\|(F_k)^\wedge\|_2 = \|F_k\|_2\,.$$

又

$$\|(F_k)^\wedge - f^\wedge\|_2 \to 0, \quad \|F_k - f\|_2 \to 0,$$

因此, 在 $L^2(K_p)$ 范数意义下, 有 $\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2$, 保范性得证.

(3) 的证明如下: 为证 $F: f \to f^\wedge$ 是 $L^2(K_p)$ 到 $L^2(\Gamma_p)$ 的同构, 先证 Fourier 变换 $F: f \to f^\wedge$ 是映上的 (onto).

记 $(L^2(K_p))^\wedge = \{f^\wedge : f \in L^2(K_p)\}$, 显然有 $(L^2(K_p))^\wedge \subset L^2(\Gamma_p)$.

若 $(L^2(K_p))^\wedge \subsetneq L^2(\Gamma_p)$, 则如下 "论断" 成立: $\exists g \in L^2(\Gamma_p)\backslash(L^2(K_p))^\wedge$, $g \neq 0$, $\|g\|_2 \neq 0$, 而没有 $f \in L^2(K_p)$, 成立 $g = f^\wedge$, 从而 $\forall f \in L^2(K_p)$, $\displaystyle\int_{\Gamma_p} \bar{g} f^\wedge = 0$ 成立.

因若不然, $\exists f \in L^2(K_p)$, 使得 $g = f^\wedge$, 则 $0 \neq \displaystyle\int_{\Gamma_p} g\bar{g} = \int_{\Gamma_p} f^\wedge \overline{f^\wedge} = \|f^\wedge\|_2^2$. 但是, $0 = \displaystyle\int_{\Gamma_p} \bar{g} f^\wedge = \int_{\Gamma_p} \bar{g} g$, 这个矛盾说明 "论断" 正确.

另一方面, 由 $0=\int_{\Gamma_p}\overline{g}f^\wedge=\int_{K_p}(\overline{g})^\wedge f$ 得到

$$\int_{K_p}(\overline{g})^\wedge f=0,\quad \forall f\in L^2(K_p).$$

由 Haar 积分的唯一性得 $\overline{g^\wedge}=(\overline{g})^\wedge=0$. 但这与 $\|g^\wedge\|_2=\|g\|_2\neq 0$ 矛盾, 所以只有

$$(L^2(K_p))^\wedge=L^2(K_p),$$

即 $F:f\to f^\wedge$ 是映上的.

映射 $F:f\to f^\wedge$ 是一一的双方连续的, 证明留给读者.

(4) 注意到 $f,g\in L^2(K_p)$ 蕴含: 当 $k\to+\infty$ 时, 有

$$\|F_k-f\|_2=\left(\int_{K_p}|f(x)\Phi_{B^{-k}}(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{|x|>p^k}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\to 0;$$

另一方面, 当 $j\to+\infty$ 时, 有

$$\|G_j-g\|_2=\left(\int_{K_p}|g(x)\Phi_{B^{-j}}(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{|x|>p^j}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

其中 F_k 与 G_j 分别为 f 与 g 的 k 截断函数与 j 截断函数. 进而

$$F_k\in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)\Rightarrow (F_k)^\wedge\in L^2(\Gamma_p)\Rightarrow \|(F_k)^\wedge-f^\wedge\|_2\to 0,$$
$$G_j\in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)\Rightarrow (G_j)^\wedge\in L^2(\Gamma_p)\Rightarrow \|(G_j)^\wedge-g^\wedge\|_2\to 0.$$

再由定理 3.1.8(5) 得

$$\int_{K_p}F_k(x)(G_j)^\wedge(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}(F_k)^\wedge(x)G_j(x)\mathrm{d}x. \tag{3.1.18}$$

这样, 在 (3.1.18) 式中先固定 k, 对于左边, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{K_p}F_k(x)(G_j)^\wedge(x)\mathrm{d}x-\int_{K_p}F_k(x)g^\wedge(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{K_p}F_k(x)\left[(G_j)^\wedge(x)-g^\wedge(x)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_{K_p}\left|F_k(x)\left[(G_j)^\wedge(x)-g^\wedge(x)\right]\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\|F_k\|_2\,\|(G_j)^\wedge-g^\wedge\|_2.\end{aligned}$$

令 $j\to+\infty$, 得

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{K_p}F_k(x)(G_j)^\wedge(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}F_k(x)g^\wedge(x)\mathrm{d}x; \tag{3.1.19}$$

对于 (3.1.18) 式右边, 当 $j\to+\infty$ 时, 同理有

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{K_p}(F_k)^\wedge(x)G_j(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}(F_k)^\wedge(x)g(x)\mathrm{d}x; \tag{3.1.20}$$

(3.1.19) 与 (3.1.20) 两式蕴含

$$\int_{K_p}F_k(x)g^\wedge(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}(F_k)^\wedge(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

对上式令 $k\to+\infty$, 作同样处理, 便得到

$$\int_{K_p}f(x)g^\wedge(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}f^\wedge(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 (4) 得证. (4) 的证明也可由 $f,g\in L^2\Rightarrow fg\in L^1$, 再用 Fubini 定理.

(5) $L^2(K_p)$ 上的 Fourier 变换是 U 变换. 因为由 $(L^2(K_p))^\wedge=L^2(\Gamma_p)$, 取 $g\in L^2(K_p)$, 使得 $\overline{g}=(g_1)^\wedge$, 于是

$$(f,g)=\int_{K_p}f\overline{g}=\int_{K_p}f(g_1)^\wedge=\int_{K_p}f^\wedge g_1=\int_{\Gamma_p}f^\wedge\overline{g^\wedge}=(f^\wedge,g^\wedge).$$

这里用到 $g_1=\overline{g^\wedge}$, 留作练习. 定理得证.

2. L^2 函数的 Fourier 逆变换

定义 3.1.12 (L^2 函数的 Fourier 逆变换) 对于 $f\in L^2(K_p)$, 有 $f^\wedge\in L^2(\Gamma_p)$, 则映射

$$F:f\to f^\wedge \tag{3.1.21}$$

是 $L^2(K_p)$ 到 $L^2(\Gamma_p)$ 的一一同构, 故映射 F 的逆映射 F^{-1} 存在, 记为

$$F^{-1}:f\to f^\vee, \tag{3.1.22}$$

称逆映射 $F^{-1}:f\to f^\vee$ 为 $f\in L^2(\Gamma_p)$ 的 Fourier 逆变换.

于是, 除了定理 3.1.16 关于 $L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换的算子性质外, 还有算子的运算性质:

定理 3.1.17 $f\in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换有如下运算性质:

(1) $(\tau_hf)^\wedge=\overline{\chi}_hf^\wedge$, $(\chi_hf)^\wedge=\tau_hf^\wedge$, 其中 $(\tau_hf)(x)=f(x-h)$, $h\in K_p$;

(2) $(\rho_kf)^\wedge=p^{-k}\rho_{-k}f^\wedge$, 其中 $(\rho_kf)(x)=f(p^kx)$, $k\in\mathbb{Z}$;

(3) $(\tilde{f})^\wedge=f^\vee$, $\left(\overline{\tilde{f}}\right)^\wedge=\overline{f^\wedge}$, $\overline{(\tilde{f})^\wedge}=(\overline{f})^\wedge$;

(4) $f\in L^2(K_p),g\in L^1(K_p)$, 则 $(f*g)^\wedge=f^\wedge g^\wedge$;

(5) $f\in L^2(K_p),f^\wedge\in L^1(\Gamma_p)$, 则 $f(x)\int_{\Gamma_p}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi$, a.e. $x\in K_p$.

这个定理的证明留作练习.

定理 3.1.18　$f \in L^2(K_p)$ 的 Fourier 变换有表示式:

$$f^\wedge(\xi) = \lim_{k\to+\infty} \int_{|x|\leqslant p^k} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x, \text{ a.e.}, \tag{3.1.23}$$

或写成

$$f^\wedge(\xi) = \lim_{k\to+\infty} \int_{K_p} f(x)\Phi_{B^{-k}}(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x, \text{ a.e.} \tag{3.1.24}$$

证　记 $\Phi_{-k} \equiv \Phi_{B^{-k}}$, 计算

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leqslant p^k} f(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x &= \int_{K_p} f(x)\Phi_{-k}(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{K_p} f(x)\overline{\Phi_{-k}(x)\chi_\xi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Gamma_p} f^\wedge(\eta)\overline{[\Phi_{-k}(\cdot)\chi_\xi(\cdot)]^\wedge(\eta)}\mathrm{d}\eta \qquad (\text{定理}3.1.16(5)) \\
&= \int_{\Gamma_p} f^\wedge(\eta)\overline{[\tau_\xi\Phi^\wedge_{-k}(\eta)]}\mathrm{d}\eta \qquad (\Phi^\wedge_{-k}(\eta) = p^k\Phi_k(\eta)) \\
&= p^k\int_{\Gamma_p} f^\wedge(\eta)\overline{[\tau_\xi\Phi_k(\eta)]}\mathrm{d}\eta \qquad (\overline{\tau_\xi\Phi_k(\eta)} = \tau_\xi\Phi_k(\eta)) \\
&= p^k\int_{\Gamma_p} f^\wedge(\eta)\tau_\xi\Phi_k(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= p^k\int_{\Gamma_p} f^\wedge(\eta)\Phi_k(\eta-\xi)\mathrm{d}\eta \\
&= p^k\int_{|\eta-\xi|\leqslant p^{-k}} f^\wedge(\eta)\mathrm{d}\eta = (f^\wedge)_k(\xi).
\end{aligned}$$

由 $f \in L^2(K_p) \Rightarrow f^\wedge \in L^2(\Gamma_p) \Rightarrow f^\wedge \in L_{\mathrm{loc}}(\Gamma_p)$, 故据定义得

$$(f^\wedge)_k(\xi) \to f^\wedge(\xi), \text{ a.e.}.$$

于是便得到 (3.1.23) 与 (3.1.24).

3.1.3　L^r 理论

本小节介绍 Fourier 分析的 $L^r(K_p)$ $(1<r<2)$ 理论.

1. $L^r(K_p)$ $(1<r<2)$ 函数的 Fourier 变换

对于 $f \in L^r(K_p)$, 当 $1<r<2$ 时, 其 Fourier 变换理论建立在 $r=1$, $r=2$ 的 Fourier 变换基础上.

事实上, 对于任意 $f\in L^r(K_p)$, 取一个常数 $\alpha>0$, 令

$$f^\alpha=\begin{cases} f, & |f|>\alpha,\\ 0, & |f|\leqslant\alpha,\end{cases}\qquad f_\alpha=\begin{cases} 0, & |f|>\alpha,\\ f, & |f|\leqslant\alpha.\end{cases}\tag{3.1.25}$$

于是, $f=f^\alpha+f_\alpha$, 且 $f^\alpha\in L^1(K_p)\bigcap L^r(K_p)$, $f_\alpha\in L^2(K_p)\bigcap L^r(K_p)$, 这是因为

$$f=f^\alpha+f_\alpha,\quad |f|^r=|f_\alpha|^r+|f^\alpha|^r,$$

且

$$\begin{aligned}&|f^\alpha|\leqslant|f|\Rightarrow f^\alpha\in L^r(K_p),\\ &|f^\alpha|\leqslant(\alpha)^{-(r-1)}|f|^r\Rightarrow f^\alpha\in L^1(K_p);\\ &|f_\alpha|\leqslant|f|\Rightarrow f_\alpha\in L^r(K_p),\\ &|f_\alpha|^2\leqslant\alpha^{2-r}|f_\alpha|^r\Rightarrow f_\alpha\in L^2(K_p).\end{aligned}$$

于是, 可以把 $f\in L^r(K_p)$ 分解为 $f=f_\alpha+f^\alpha$, 且令

$$L^1(K_p)+L^2(K_p)=\left\{f\in L^r(K_p):\ f=f_\alpha+f^\alpha,\ f_\alpha\in L^1(K_p),\ f^\alpha\in L^2(K_p)\right\},$$

如此, 可以定义 $L^r(K_p)$ 的 Fourier 变换.

定义 3.1.13 (L^r 函数的 Fourier 变换) 对于 $f\in L^r(K_p)$, 取 (3.1.25) 中的函数 f_α, f^α, 使得 $f=f_\alpha+f^\alpha$, 并定义

$$f^\wedge=(f_\alpha)^\wedge+(f^\alpha)^\wedge,\tag{3.1.26}$$

这样定义的 $f^\wedge$ 是唯一确定的.

定理 3.1.19 由 (3.1.26) 定义的 $f\in L^r(K_p)$ 的 Fourier 变换是唯一确定的, 且 $F:f\to f^\wedge$ 是 $L^r(K_p)$ 到 $L^{r'}(\Gamma_p)$ 的范数非增的线性算子, 其中 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}=1$, $1<r<2$.

证 唯一性. 设

$$f=f_1+f_2,\quad f_1\in L^1(K_p),\ f_2\in L^2(K_p);\tag{3.1.27}$$

$$f=g_1+g_2,\quad g_1\in L^1(K_p),\ g_2\in L^2(K_p);\tag{3.1.28}$$

于是, 由 (3.1.27) 与 (3.1.28), 首先得

$$f_1+f_2=f=g_1+g_2,$$

即 $f_1-g_1=g_2-f_2$; 其次得

$$f_1-g_1\in L^1(K_p),\quad g_2-f_2\in L^2(K_p),$$

这表明 $f_1-g_1\in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$, $g_2-f_2\in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$. 显然

$$(f_1-g_1)^\wedge\in L^2(\Gamma_p),\quad (g_2-f_2)^\wedge\in L^2(\Gamma_p).$$

如下推理便得到唯一性:

$$\begin{aligned}f_1-g_1=g_2-f_2&\Rightarrow(f_1-g_1)^\wedge=(g_2-f_2)^\wedge\Rightarrow(f_1)^\wedge-(g_1)^\wedge=(g_2)^\wedge-(f_2)^\wedge\\&\Rightarrow(f_1)^\wedge+(f_2)^\wedge=(g_2)^\wedge+(g_1)^\wedge\Rightarrow(f_1+f_2)^\wedge=(g_1+g_2)^\wedge.\end{aligned}$$

线性是明显的.

范数非增性. 由于

$$\begin{aligned}&f\in L^1(K_p)\Rightarrow f^\wedge\in L^\infty(\Gamma_p)\Rightarrow\|f^\wedge\|_{L^\infty(\Gamma_p)}\leqslant\|f\|_{L^1(K_p)};\\&f\in L^2(K_p)\Rightarrow f^\wedge\in L^2(\Gamma_p)\Rightarrow\|f^\wedge\|_{L^2(\Gamma_p)}=\|f\|_{L^2(K_p)}.\end{aligned}$$

于是, 算子 $F:f\to f^\wedge$ 是 $L^1(K_p)\to L^\infty(\Gamma_p)$, $L^2(K_p)\to L^2(\Gamma_p)$ 的连续线性算子, 且是强 $(1,\infty)$ 型与强 $(2,2)$ 型的, 因此, 由 Riesz-Thorin 凸性定理 [51], 得到 $F:f\to f^\wedge$ 是 $L^r(K_p)\to L^{r'}(\Gamma_p)$ 的范数非增算子; 对于 $1<r<2$, 有

$$f\in L^r(K_p)\Rightarrow f^\wedge\in L^{r'}(\Gamma_p)\Rightarrow\|f^\wedge\|_{L^{r'}(\Gamma_p)}\leqslant\|f\|_{L^r(K_p)}.\tag{3.1.29}$$

定理得证.

注　公式 (3.1.29) 对于 $1\leqslant r\leqslant 2$ 成立.

2. $L^r(K_p)$ $(1<r<2)$ Fourier 变换的性质

定理 3.1.20　$f\in L^r(K_p)$ $(1<r<2)$ 的 Fourier 变换有如下性质:

(1) $(\tau_hf)^\wedge=\overline{\chi}_hf^\wedge$, $(\chi_hf)^\wedge=\tau_hf^\wedge$, 其中 $(\tau_hf)(x)=f(x-h)$, $h\in K_p$;

(2) $(\rho_kf)^\wedge=p^{-k}\rho_{-k}f^\wedge$, 其中 $(\rho_kf)(x)=f(p^kx)$, $k\in\mathbb{Z}$;

(3) $\left(\bar{\tilde{f}}\right)^\wedge=\overline{f^\wedge}$, $\overline{\left(\tilde{f}\right)^\wedge}=(\overline{f})^\wedge$;

(4) $f\in L^r(K_p)$, $g\in L^1(K_p)$, 则 $(f*g)^\wedge=f^\wedge g^\wedge$;

(5) $f,g\in L^r(K_p)$, 则 $\displaystyle\int_{K_p}f^\wedge g\mathrm{d}x=\int_{K_p}fg^\wedge\mathrm{d}x$;

(6) $f\in L^r(K_p)$, $g\in L^1(K_p)$, $g^\wedge\in L^1(\Gamma_p)$, 则 $\displaystyle\int_{K_p}f\overline{g}=\int_{\Gamma_p}f^\wedge\overline{g^\wedge}$;

(7) $f\in L^r(K_p), f^\wedge\in L^1(\Gamma_p)$, 则 $\displaystyle f(x)=\int_{\Gamma_p}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)d\xi$, a.e. $x\in K_p$.

这个定理的证明留作练习.

3.1.4 分布理论

为完成局部域 K_p 上的 Fourier 分析, 下面讨论局部域 K_p 上的分布理论 [2],[72].

与 $\mathbb{R}^n$ 情形类似, 分布理论是局部域上调和分析的重要组成部分. 在前三节中, 得到了 Fourier 变换 $F: f \to f^\wedge$ 是 $L^r(K_p) \to L^{r'}(\Gamma_p)$ 的范数非增算子, $1 \leqslant r \leqslant 2$, 即

$$f \in L^r(K_p) \Rightarrow f^\wedge \in L^{r'}(K_p), \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1;$$
$$\|f^\wedge\|_{L^{r'}(\Gamma_p)} \leqslant \|f\|_{L^r(K_p)}.$$

但是却不能推广到 $r > 2$. 为此, 这里采用分布理论解决这个问题.

本节除了要用到检验函数类 $\mathbb{S}(K_p)$, 以及前面所介绍的有关 $\mathbb{S}(K_p)$ 的各种性质外, 还要用到以下的定理:

定理 3.1.21 若 $\varphi, \psi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则平移 $\tau_h\varphi$、伸缩 $\rho_k\varphi$、反射 $\widetilde{\varphi}$、乘积 $\varphi \cdot \psi$、卷积 $\varphi * \psi$ 都属于 $\mathbb{S}(K_p)$. 进而, 检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 中, 映射 $\varphi \to \tau_h\varphi$, $\varphi \to \rho_k\varphi$, $\varphi \to \widetilde{\varphi}$ 也是 $\mathbb{S}(K_p)$ 到 $\mathbb{S}(K_p)$ 的同胚.

定理是显然的.

1. $\mathbb{S}(K_p)$ 上的分布、分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$

首先定义分布与分布空间.

定义 3.1.14 ($\mathbb{S}(K_p)$ 上的分布) 检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的一个*连续线性泛函* $T: \mathbb{S}(K_p) \to \mathbb{C}$ 称为 $\mathbb{S}(K_p)$ 的一个*分布*; $\mathbb{S}(K_p)$ 上分布的全体所成的集合称为 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的*分布空间*, 记为

$$\mathbb{S}^*(K_p) = \{T: K_p \to \mathbb{C},\ T \text{ 是 } K_p \text{ 上的连续线性泛函}\}.$$

在分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中, $\forall T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 对 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的作用记为

$$\langle T, \varphi \rangle, \tag{3.1.30}$$

有 $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$. 赋予 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 以弱*拓扑 (w^*-topology): 对于 $T_n \in \mathbb{S}^*(K_p)$,

$$T_n \xrightarrow{\mathbb{S}^*(K_p)} 0 \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} 0,\ \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p). \tag{3.1.31}$$

分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 在弱*拓扑之下成为一个拓扑空间. 在 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中定义加法与数乘: $T, S \in \mathbb{S}^*(K_p)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) $T + S$ 定义为满足

$$\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $T + S \in \mathbb{S}^*(K_p)$;

(ii) αT 定义为满足

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $\alpha T \in \mathbb{S}^*(K_p)$.

于是, 在这样的加法与数乘之下, $\mathbb{S}^*(K_p)$ 成为数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 不难证明, 在弱*拓扑之下, 加法与数乘是连续的. 因此, $\mathbb{S}^*(K_p)$ 在弱*拓扑之下成为一个**拓扑线性空间**.

下面给出 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 的例.

例 3.1.6　$L_{\mathrm{loc}}(K_p) \subset \mathbb{S}^*(K_p)$.

解　$\forall f \in L_{\mathrm{loc}}(K_p)$, 由

$$\langle T, \varphi \rangle \equiv \langle f, \varphi \rangle = \int_{K_p} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

确定的积分表示, 显然是一个线性泛函. 其连续性证明如下: 取 $\varphi_n \in \mathbb{S}(K_p)$, 且

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathbb{S}(K_p)} \varphi.$$

令 $\sup\limits_n |\varphi_n(x)| = \psi(x)$, 则 $\psi \in L^1(K_p)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得到 $\langle f, \varphi_n \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle f, \varphi \rangle$. 于是, $f \in L_{\mathrm{loc}}(K_p) \Rightarrow T = f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 此即 $L_{\mathrm{loc}}(K_p) \subset \mathbb{S}^*(K_p)$.

例 3.1.7　$L^r(K_p) \subset \mathbb{S}^*(K_p)$, $1 \leqslant r < +\infty$.

解　由 $L^r(K_p) \subset L_{\mathrm{loc}}(K_p)$ 得到.

例 3.1.8　狄拉克 (Dirac) 分布 $\delta \in \mathbb{S}^*(K_p)$.

解　狄拉克分布 δ 定义为

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p). \tag{3.1.32}$$

不难验证 $\delta \in \mathbb{S}^*(K_p)$.

定义 3.1.15 (正则分布与奇异分布)　分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中的分布 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 称为**正则分布**, 若它能表示为积分形式

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{K_p} f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p),$$

其中 $f: K_p \to \mathbb{C}$ 为 K_p 上的复值函数; 否则, 就称分布 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 为**奇异分布**.

于是, $L_{\mathrm{loc}}(K_p)$ 中的分布是正则的; δ 是奇异分布.

2. 分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的 Fourier 变换

定义 3.1.16($\mathbb{S}^*(K_p)$上的 Fourier 变换与逆变换) 分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中分布的 Fourier 变换定义为：称一个分布 $S\in\mathbb{S}^*(\Gamma_p)$ 为分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的 Fourier 变换，若

$$\langle S,\varphi^\wedge\rangle=\langle T,\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$$

成立，仍用记号 $S=T^\wedge$. 因此上式也写为

$$\langle T^\wedge,\varphi^\wedge\rangle=\langle T,\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p). \tag{3.1.33}$$

分布 $T\in\mathbb{S}^*(\Gamma_p)$ 的Fourier 逆变换 $T^\vee\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 定义为满足

$$\langle T^\vee,\varphi^\vee\rangle=\langle T,\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p) \tag{3.1.34}$$

的分布 $T^\vee$.

由于 K_p 与 Γ_p 同胚，(3.1.33) 与 (3.1.34) 都可写为如下等价形式

$$\langle T^\wedge,\varphi\rangle=\langle T,\varphi^\wedge\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p), \tag{3.1.35}$$

$$\langle T^\vee,\varphi\rangle=\langle T,\varphi^\vee\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p). \tag{3.1.36}$$

例 3.1.9 狄拉克分布 $\delta\in\mathbb{S}(K_p)$ 的 Fourier 变换.

解 狄拉克分布 δ 的 Fourier 变换 $\delta^\wedge$ 由下面推演求得：由 (3.1.35), $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$,

$$\langle\delta^\wedge,\varphi\rangle=\langle\delta,\varphi^\wedge\rangle=\varphi^\wedge(0)=\int_{K_p}\varphi(x)\overline{\chi}_0(x)\mathrm{d}x=\int_{K_p}\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle 1,\varphi\rangle,$$

由此得到 $\delta^\wedge=1$.

$\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的 Fourier 变换有重要的分析性质.

定理 3.1.22 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的 Fourier 变换 $F:T\to T^\wedge$ 与 Fourier 逆变换 $F^{-1}:S\to S^\vee$ 具有如下性质:

(1) F 与 F^{-1} 是 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 到 $\mathbb{S}^*(\Gamma_p)$ 的一对一映上的线性算子，且

$$(T^\wedge)^\vee=T=(T^\vee)^\wedge;$$

(2) Fourier 变换 $F:T\to T^\wedge$ 与逆变换 $F^{-1}:T\to T^\vee$ 是 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 到 $\mathbb{S}^*(\Gamma_p)$ 的同胚.

证 (1) 的证明如下：由 Fourier 变换与逆变换是 $\mathbb{S}(K_p)$ 到 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 的同胚，故

$$\langle(T^\wedge)^\vee,\varphi\rangle=\langle(T^\wedge),\varphi^\vee\rangle=\langle T,(\varphi^\vee)^\wedge\rangle=\langle T,\varphi\rangle;$$
$$\langle(T^\vee)^\wedge,\varphi\rangle=\langle(T^\vee),\varphi^\wedge\rangle=\langle T,(\varphi^\wedge)^\vee\rangle=\langle T,\varphi\rangle.$$

第二个性质也是由 Fourier 变换与逆变换是 $\mathbb{S}(K_p)$ 到 $\mathbb{S}(K_p)$ 的同胚得到的.

在分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中, 可以定义: 分布的平移、伸缩、反射、乘积, 并且具有与 $\mathbb{S}(K_p)$ 中平移、伸缩、反射、乘积相同的性质.

定义 3.1.17 ($\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的运算) (i) *平移*. 对于 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, $h \in K_p$, 定义分布的平移 $\tau_h T$ 为满足

$$\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $\tau_h T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 其中 $\tau_{-h}\varphi(x) = \varphi(x+h)$;

(ii) *伸缩*. 对于 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 定义分布的伸缩 $\rho_k T$, $k \in \mathbb{N}$, 为满足

$$\langle \rho_k T, \varphi \rangle = \langle T, p^{-k}\rho_{-k}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 其中 $(\rho_k\varphi)(x) = \varphi(p^k x)$ 是 φ 的伸缩;

(iii) *反射*. 对于 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 定义分布的反射 $\tilde{T}$ 为满足

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $\tilde{T} \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 其中 $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ 是 φ 的反射;

(iv) *乘积*. 对于 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 定义分布与函数 $g \in C(K_p)$ 的乘积为满足

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $T\ g \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 其中 $(g\varphi)(x) = g(x)\varphi(x)$.

定理 3.1.23　$\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的运算的 Fourier 变换, 具有如下性质: 设 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$,

(1) T 的平移的 FT: $(\tau_h T)^\wedge = \overline{\chi}_h T^\wedge$, $h \in K_p$;

(2) T 的 FT 的平移: $\tau_h T^\wedge = (\chi_h T)^\wedge$, $h \in K_p$;

(3) T 的伸缩的 FT: $(\rho_k T)^\wedge = p^{-k}\rho_{-k}T^\wedge$, $k \in \mathbb{Z}$;

(4) T 的反射的 FT: $\left(\tilde{T}\right)^\wedge = T^\vee$, $\left(\tilde{\overline{T}}\right)^\wedge = \overline{T^\wedge}$, $\overline{\left(\tilde{T}\right)^\wedge} = \left(\overline{T}\right)^\wedge$;

(5) T 的 FT 的反射: $(T^\wedge)^\sim = T^\vee$;

(6) T 的 FT 的逆 FT: $(T^\wedge)^\vee = (T^\vee)^\wedge = T$.

证　(1) 任取 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 于是, $\forall h \in K_p$, 式 (1) 左边 $(\tau_h T)^\wedge$ 对 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的作用为

$$\langle (\tau_h T)^\wedge, \varphi \rangle = \langle \tau_h T, \varphi^\wedge \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi^\wedge \rangle = \langle T, (\overline{\chi}_h\varphi)^\wedge \rangle;$$

式 (1) 右边 $\overline{\chi}_h T^\wedge$ 对 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的作用为

$$\langle \overline{\chi}_h T^\wedge, \varphi \rangle = \langle T^\wedge, \overline{\chi}_h \varphi \rangle = \left\langle T, (\overline{\chi}_h\varphi)^\wedge \right\rangle,$$

式 (1) 得证.

(2) 任取 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 于是, $\forall h\in K_p$, 式 (2) 左边 $\tau_hT^\wedge$ 对 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的作用为

$$\langle\tau_hT^\wedge,\varphi\rangle=\langle T^\wedge,\tau_{-h}\varphi\rangle=\left\langle T,(\tau_{-h}\varphi)^\wedge\right\rangle=\langle T,\chi_h\,\varphi^\wedge\rangle;$$

↑ 分布平移定义 ↑ 分布 FT 定义 ↑ φ平移的 FT 公式

式 (2) 右边 $(\chi_hT)^\wedge$ 对 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的作用为

$$\left\langle(\chi_hT)^\wedge,\varphi\right\rangle=\langle\chi_hT,\varphi^\wedge\rangle=\langle T,\chi_h\varphi^\wedge\rangle,$$

↑ 分布 FT 定义 ↑ 分布乘以$\chi_h(\cdot)$

于是得到

$$\tau_hT^\wedge=(\chi_hT)^\wedge,\quad h\in K_p.$$

式 (2) 得证.

(3) 任取 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 式 (3) 左边 $(\rho_kT)^\wedge$ 对 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的作用为

$$\left\langle(\rho_kT)^\wedge,\varphi\right\rangle=\langle\rho_kT,\varphi^\wedge\rangle=\left\langle T,p^{-k}\rho_{-k}\varphi^\wedge\right\rangle;$$

↑ 伸缩的定义

式 (3) 右边 $p^{-k}\rho_{-k}T^\wedge$ 对 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的作用为

$$\begin{aligned}\left\langle p^{-k}\rho_{-k}T^\wedge,\varphi\right\rangle&=p^{-k}\left\langle\rho_{-k}T^\wedge,\varphi\right\rangle=p^{-k}\left\langle T^\wedge,p^k\rho_k\varphi\right\rangle=p^{-k}\left\langle T,p^k(\rho_k\varphi)^\wedge\right\rangle\\&=p^{-k}p^k\left\langle T,(\rho_k\varphi)^\wedge\right\rangle=\left\langle T,p^{-k}(\rho_{-k}\varphi^\wedge)\right\rangle,\end{aligned}$$

式 (3) 得证.

(4)~(6) 的证明留给读者.

下面给出分布的 Parseval 公式:

定理 3.1.24 对于分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 与函数 $g\in\mathbb{S}(K_p)$, 有

(1) $\langle T,\overline{g}\rangle=\langle T^\wedge,\overline{g^\wedge}\rangle$;

(2) $\langle T,g\rangle=\langle T^\wedge,g^\vee\rangle$.

证 对于 (1), 为证 $\langle T,\overline{g}\rangle=\langle T^\wedge,\overline{g^\wedge}\rangle$, 取 $g\in\mathbb{S}(K_p)$, 将其共轭 $\overline{g}$ 改写为

$$\overline{g}(x)=\left[(\overline{g})^\vee\right]^\wedge(x)=\left[\int_{\Gamma_p}\overline{g}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^\wedge\equiv h^\wedge(x).$$

于是

$$\begin{aligned}\langle T,\overline{g}\rangle=\langle T,h^\wedge\rangle=\langle T^\wedge,h\rangle&=\left\langle T^\wedge,\int_{\Gamma_p}\overline{g}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi\right\rangle\\&=\left\langle T^\wedge,\overline{\int_{\Gamma_p}g(\xi)\overline{\chi}_x(\xi)\mathrm{d}\xi}\right\rangle=\langle T^\wedge,\overline{g^\wedge}\rangle.\end{aligned}$$

对于 (2), 为证 $\langle T,g\rangle=\langle T^{\wedge},g^{\vee}\rangle$, 由

$$\langle T^{\wedge},g^{\vee}\rangle=\langle T,(g^{\vee})^{\wedge}\rangle=\langle T,g\rangle,$$

定理得证.

例 3.1.10 支撑在 t_0 的狄拉克分布 $\delta_{t_0}\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的 Fourier 变换.

支撑在 t_0 的狄拉克分布 δ_{t_0} 定义为

$$\langle\delta_{t_0},\varphi\rangle\equiv\langle\tau_{t_0}\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,\tau_{-t_0}\varphi\rangle=\langle\delta,\varphi(\xi+t_0)\rangle=\varphi(t_0),\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p).$$

于是, 据定理 3.1.23(1), 有

$$(\delta_{t_0})^{\wedge}=(\tau_{t_0}\delta)^{\wedge}=\overline{\chi}_{t_0}(\xi)\delta^{\wedge}=\overline{\chi}_{t_0}(\xi)\cdot 1=\overline{\chi}_{t_0}(\xi),\quad\xi\in\Gamma_p.$$

例 3.1.11 1 的 Fourier 变换.

$$\begin{aligned}\langle 1^{\wedge},\varphi\rangle=\langle 1,\varphi^{\wedge}\rangle&=\int_{\Gamma_p}\varphi^{\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p}\varphi^{\wedge}(\xi)\overline{\chi}_0(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\Gamma_p}\varphi^{\wedge}(\xi)\chi_0(\xi)\mathrm{d}\xi=(\varphi^{\wedge})^{\vee}(0)=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p),\end{aligned}$$

从而得到

$$1^{\wedge}=\delta.$$

3. 分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的卷积

首先定义一个分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的支集.

定义 3.1.18 (分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的支集) 设 $\Omega\subset K_p$ 为 K_p 中的开集.

(i) 分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 在开子集 $V\subset\Omega$ 上为零分布, 是指

$$\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p),\text{ 且 }\operatorname{supp}\varphi\subset V\text{ 蕴含 }\langle T,\varphi\rangle=0.$$

因为 $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\leftrightarrow(k,l)$, (k,l) 为其指标对, 故 $\operatorname{supp}\varphi=B^l$. 于是, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 必具有既开又闭且紧的支集.

(ii) 分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 在每个开子集 $V_j\subset V$, $j\in\Lambda$ 上为零分布, 则称并集 $V=\bigcup\limits_{j\in\Lambda}V_j$ 为使 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 为零分布的最大开子集;

若 V 是使得 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 为零分布的最大开子集, 则称 V 的补集 V^C 为分布 T 的支集, 记为 $\operatorname{supp}T$, 或 $\operatorname{supp}T=\overline{\{U\subset K_p:T|_U\neq 0\}}$.

若 $\operatorname{supp}T$ 为 K_p 中的紧集, 则称分布 T 具有紧支集.

局部域上函数的卷积, 已经在定义 3.1.6 给出. 本小节定义局部域上分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的卷积.

回顾函数卷积的定义, 对于 $f,\ g\in L^1(K_p)$, 卷积的表示式为

$$\begin{aligned}f*g(x)&=\int_{K_p}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{K_p}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y=\int_{K_p}f(y)\tilde{g}(y-x)\mathrm{d}y\\&=\int_{K_p}f(y)\tau_x\tilde{g}(y)\mathrm{d}y=\langle f,\tau_x\tilde{g}\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\tau_x\tilde{g}(y)=\tilde{g}(y-x)=g(x-y)$. 对每个 $x\in K_p$, $f*g(x)=\langle f,\tau_x\tilde{g}\rangle$ 是 $x\in K_p$ 的复值函数, 且 $f*g\in L^1(K_p)$ 可视为一个分布.

进而, 将 $f*g(x)=\langle f,\tau_x\tilde{g}\rangle$ 视为一个分布, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 有

$$\begin{aligned}\langle f*g(x),\varphi\rangle&=\langle\langle f,\tau_x\tilde{g}\rangle,\varphi\rangle=\left\langle\int_{K_p}f(y)\tilde{g}(y-x)\mathrm{d}y,\varphi\right\rangle\\&=\int_{K_p}\left\{\int_{K_p}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right\}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{K_p}f(y)\left\{\int_{K_p}g(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\\&=\int_{K_p}f(y)\left\{\int_{K_p}g(t)\varphi(y+t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y\quad(x-y=t)\\&=\int_{K_p}f(y)\left\{\int_{K_p}g(x)\varphi(x+y)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\quad(t\xrightarrow{\text{换成}}x)\\&=\langle f_y,\langle g_x,\varphi(x+y)\rangle\rangle=\langle f_x,\langle g_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle,\end{aligned}$$

故卷积可定义为一个满足

$$\langle f*g(x),\varphi\rangle=\langle f_x,\langle g_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $f*g(x)$.

以上分析启发我们, 当 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, $\psi\in\mathbb{S}(K_p)$ 时, 卷积 $T*\psi$ 可以定义为一个分布, 满足

$$\langle T*\psi(x),\varphi\rangle=\langle T_x,\langle\psi_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p).$$

定义 3.1.19 (卷积) 对于分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 定义

(i) 分布与函数的卷积. 分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 与函数 $\psi\in\mathbb{S}(K_p)$ 的卷积为满足

$$\langle T*\psi,\varphi\rangle=\langle T_x,\langle\psi_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\tag{3.1.37}$$

的分布 $T*\psi\in\mathbb{S}^*(K_p)$.

(ii) 分布与分布的卷积. 对于两个分布 $S,\ T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 定义卷积 $S*T$ 为满足

$$\langle S*T,\varphi\rangle=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\varphi(\xi+\eta)\rangle,\quad \varphi\in\mathbb{S}(K_p) \tag{3.1.38}$$

的分布, 其中 $S_\xi\otimes T_\eta$ 由下式确定

$$\langle S_\xi\otimes T_\eta,u(\xi,\eta)\rangle=\langle S_\xi,\langle T_\eta,u(\xi,\eta)\rangle\rangle=\langle T_\xi,\langle S_\eta,u(\xi,\eta)\rangle\rangle,\quad \forall u\in\mathbb{S}(K_p\times K_p),$$

且 $\forall\varphi,\ \psi\in\mathbb{S}(K_p)$, $\langle S_\xi\otimes T_\eta,\varphi(\xi)\psi(\eta)\rangle=\langle S,\varphi\rangle\langle T,\psi\rangle$, 这里 $S_\xi\otimes T_\eta$ 是 S 与 T 的张量积.

假设其中一个为紧支的, 例如 supp S 为紧集, 则表示式 (3.1.38) 化为 (3.1.37) 的形式:

$$\langle S*T,\varphi\rangle=\langle S_x,\langle T_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p).$$

这部分的理论准备比较复杂, 并且还有许多值得研究的开问题, 因此这里作为思考题给出 [1].

定理 3.1.25　当 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 与 $\psi\in\mathbb{S}(K_p)$ 时, 卷积 $T*\psi$ 可以写成

$$T*\psi(x)=\langle T_y,\psi(x-y)\rangle,\quad x\in K_p.$$

证　事实上, 对于 $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 由定义

$$\langle T*\psi,\varphi\rangle=\langle T_x,\langle\psi_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle$$

$$\uparrow$$

$$\langle\psi_y,\varphi(x+y)\rangle=\int_{K_p}\psi(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y=\int_{K_p}\psi(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=\left\langle T_x,\int_{K_p}\psi(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\rangle=\left\langle T_y,\int_{K_p}\psi(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x\right\rangle$$

$$\uparrow$$

$$x\xrightarrow{\text{换成}}y,\ t\xrightarrow{\text{换成}}x$$

$$=\int_{K_p}\langle T_y,\psi(x-y)\rangle\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle\langle T_y,\psi(x-y)\rangle,\varphi(x)\rangle,$$

这蕴含 $T*\psi(x)=\langle T_y,\psi(x-y)\rangle,\ x\in K_p$. 这里

$$\left\langle T_y,\int_{K_p}\psi(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x\right\rangle=\int_{K_p}\langle T_y,\psi(x-y)\rangle\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

用了 T_y 与积分交换次序, 其合理性是需要证明的 [1], 这里从略. 定理得证.

注　由定理 3.1.25 立即推出, 交换律 $T*\psi=\psi*T$ 对 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 与 $\psi\in\mathbb{S}(K_p)$ 成立.

分布卷积的运算公式如下.

定理 3.1.26 对于 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, $f,\ g\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 且 f 与 g 具有紧支集, 狄拉克分布 $\delta\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 有

(1) $T*(\alpha f+\beta g)=\alpha T*f+\beta T*g,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$;

(2) $(T*f)*g=T*(f*g)$;

(3) $T*f=f*T$;

(4) $T*\delta=\delta*T=T$;

(5) $\tau_h(T*f)=(\tau_hT)*f=T*(\tau_hf);\quad(\tau_h\delta)*T=\tau_hT$;

(6) $(T*f)^\wedge=T^\wedge f^\wedge$.

证 (1) 显然. 对于 (2), 由卷积的定义, 任取 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 由 (2) 式左边出发, 得

$$
\begin{aligned}
\langle (T*f)*g,\varphi\rangle &\underset{(T*f)*g\text{的定义}}{=} \langle (T*f)_x,\langle g_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle \underset{(T*f)_x\text{的定义}}{=} \langle T_x,\langle f_y,\langle g_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle\rangle\\
&=\langle T_x,\langle (f*g)_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle=\langle T_x*(f*g)_y,\varphi(x+y)\rangle\\
&=\langle T*(f*g),\varphi\rangle,
\end{aligned}
$$

从而 (2) 得证.

为证 (3), 分为两步:

① 设 $T_1,T_2\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 若 $T_1*\varphi=T_2*\varphi$, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 则 $T_1=T_2$.

因 $T_1*\varphi=T_2*\varphi$, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 故由定理 3.1.25, $\forall T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 有

$$T*\varphi(x)=\langle T_y,\varphi(x-y)\rangle=\langle T_y,\tilde{\varphi}(y-x)\rangle,\quad x\in K_p,$$

在上式中令 $x=0$, 得 $T*\varphi(0)=\langle T_y,\tilde{\varphi}(y)\rangle$, 故 $T*\tilde{\varphi}(0)=\langle T_y,\varphi(y)\rangle=\langle T,\varphi\rangle$. 将上式用于 T_1 与 T_2, 有

$$\langle T_1,\varphi\rangle=(T_1*\widetilde{\varphi})(0)=(T_2*\widetilde{\varphi})(0)=\langle T_2,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p).$$

从而有 $T_1=T_2$.

② 对于 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, $f\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 且 f 具有紧支集, 下面证明 $T*f=f*T$.

任取 $\varphi,\ \psi\in\mathbb{S}(K_p)$, 则 $\varphi*\psi=\psi*\varphi$. 于是据定理 3.1.25 的注, 有

$$
\begin{aligned}
(T*f)*(\varphi*\psi) &\underset{\text{函数卷积的交换律}}{=} (T*f)*(\psi*\varphi) \underset{\text{本定理中的结合律 (2)}}{=} T*(f*\psi*\varphi)\\
&= T*(f*\psi)*\varphi \underset{\text{定理 3.1.25 的注}}{=} T*\varphi*(f*\psi)
\end{aligned}
$$

$$= (T * \varphi) * (f * \psi) = (f * \psi) * (T * \varphi)$$
$$= f * \psi * (T * \varphi) = f * (T * \varphi) * \psi = (f * T) * (\varphi * \psi).$$

继而, 由①得 (3).

为证 (4), $T * \delta = \delta * T = T$, 也分两步.

① 当 $T = f \in \mathbb{S}(K_p)$, 证 $\delta * f = f$. 由定理 3.1.25,

$$\delta * f(x) = \langle \delta_y, f(x-y) \rangle = f(x-y)\big|_{y=0} = f(x).$$

将 δ 视为 $\delta \in \mathbb{S}^*(K_p)$, $f \in \mathbb{S}(K_p)$, 据定理 3.1.25 的注得到 $f = \delta * f = f * \delta$.

② 当 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 由

$$(T * \delta) * \varphi = T * (\delta * \varphi) = T * \varphi,$$

得 $T * \delta = T$.

此性质使我们可以将 $\delta \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 视为 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中卷积运算 $*$ 的单位元.

先证 (5) 的第二式, $(\tau_h \delta) * T = \tau_h T$. 任取 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则

$$\langle (\tau_h \delta) * T, \varphi \rangle = \langle T * (\tau_h \delta), \varphi \rangle = \langle T_\xi, \langle (\tau_h \delta)_\eta, \varphi_{\xi+\eta} \rangle \rangle$$
$$= \langle T_\xi, \varphi_{\xi+h} \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle = \langle \tau_h T, \varphi \rangle.$$

次证 (5) 的第一式, $\tau_h(T * f) = (\tau_h T) * f = T * (\tau_h f)$. 任取 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则

$$\langle \tau_h(T * f), \varphi \rangle = \langle T * f, \tau_{-h}\varphi \rangle = \langle (T * f)_\xi, \varphi(\xi + h) \rangle$$
$$= \langle T_\xi, \langle f_\eta, \varphi_{\xi+\eta+h} \rangle \rangle = \langle T_\xi, \langle f_\eta, \tau_{-h}\varphi_{\xi+\eta} \rangle \rangle = \langle T_\xi, \langle \tau_h f_\eta, \varphi_{\xi+\eta} \rangle \rangle$$
$$= \langle T_\xi * \tau_h f_\eta, \varphi_{\xi+\eta} \rangle = \langle T * \tau_h f, \varphi \rangle.$$

进而, 由交换律 $\tau_h(T * f) = \tau_h(f * T)$ 与同样的推理, 得

$$\tau_h(f * T) = (\tau_h f) * T = T * (\tau_h f),$$

从而 (5) 的第一式得证.

性质 (5) 的意义: 卷积对于平移的不变性.

(6) 证明留作习题.

与经典情形类似, 空间 $L^1(K_p)$ 在加法、数乘、L^1 范数、卷积运算之下构成一个没有单位元的 Banach 代数, 若将本定理的性质 (4) 用于 $L^1(K_p)$ 中的元, 则 $\forall f \in L^1(K_p)$, 有 $\delta * f = f * \delta = f$, δ 就是卷积运算的单位元.

以上较全面地讨论了局部域 K_p 上的分布理论. 利用有关结果, 可以将局部域 K_p 上的 Fourier 分析关于 $L^r(K_p), 1 \leqslant r \leqslant 2$ 理论推广到 $r > 2$ 情形, 使得 $\forall f \in L^r(K_p), r > 2$, 作为一个分布 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 而得到其 Fourier 分析的理论. 因此完成了局部域 K_p 上完整的 Fourier 分析的讨论.

思 考 题

1. 局部域 K_p 加群 K_p^+ 上的 Fourier 变换的基础是什么？请熟悉 K_p^+ 上的一些积分运算关系.
2. 试证定理 3.1.1(3) 与定理 3.1.3.
3. 为建立乘群 K_p^* 上的 Fourier 分析理论, 该作何种准备?
4. 比较定理 3.1.11 的证明与 $\mathbb{R}$ 情形的证明在技巧上的异同.
5. 试证：若 $f,\ g\in L^1(K_p)\bigcap L^2(K_p)$, 则
   (1) $(f*g)^\wedge=|f^\wedge|^2\geqslant 0$;
   (2) $f*g\in L^1(K_p)$;
   (3) $f*g$ 连续.
6. 若 $g\in L^2(K_p)$, 且 $\overline{g}=(g_1)^\wedge$, 试证 $g_1=\overline{g^\wedge}$.
7. 试证定理 3.1.17 与定理 3.1.20.
8. 对于局部域 K_p 的乘群 K_p^*, 其上的特征、特征群如何? Fourier 分析的 L^r $(1\leqslant r\leqslant 2)$ 理论如何? 思考相应的问题.
9. 试证定理 3.1.23(4)~(6) 与定理 3.1.26(6).
10. 建立乘群 K_p^* 上的分布理论, 以及相关的 Fourier 分析理论.
11. 对于两个分布 $S,\ T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 它们的卷积 $S*T$ 当如何研究? 参照经典情形与定义 3.1.19 进行设计.

3.2 局部域 K_p 上的拟微分算子

局部域 K_p 上的拟微分算子理论是建立局部域上微积分理论的基础. 在 3.1 节中已经定义了检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 及分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$, 现在来定义象征类. 本节参考文献为 [72].

3.2.1 局部域上的象征类 $S^\alpha_{\rho\delta}(K_p)\equiv S^\alpha_{\rho\delta}(K_p\times\Gamma_p)$

定义 3.2.1 (象征类) 若复值函数 $\sigma:K_p\times\Gamma_p\to\mathbb{C}$ 满足如下条件：对于实数 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\rho\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$,

(i) 存在常数 $c>0$, 使得

$$|\sigma(x,\xi)|\leqslant c\langle\xi\rangle^\alpha,\quad x\in K_p,\ \xi\in\Gamma_p,$$

其中 $\langle\xi\rangle=\max\{1,|\xi|\}$;

(ii) 对任一对 $(\mu,\nu)\in\mathbb{P}\times\mathbb{P}$, 存在常数 $c_{\mu\ \nu}>0$, 使得

$$|\Delta_h^x\Delta_k^\xi\sigma(x,\xi)|\leqslant c_{\mu\ \nu}|h|^\mu|k|^\nu\langle\xi\rangle^{\alpha+\delta\mu-\rho\nu},\quad x,h\in K_p,\ \xi,k\in\Gamma_p,$$

且存在常数 $c_\mu>0$, $c_\nu>0$, 使得

$$|\Delta_h^x\sigma(x,\xi)|\leqslant c_\mu|h|^\mu\langle\xi\rangle^{\alpha+\delta\mu},\quad x,h\in K_p,\ \xi\in\Gamma_p;$$

$$|\Delta_k^\xi\sigma(x,\xi)| \leqslant c_\nu|k|^\nu\langle\xi\rangle^{\alpha-\rho\nu}, \quad x\in K_p,\ \xi,k\in\Gamma_p,\ |k|<\langle\xi\rangle;$$

其中 $\Delta_h^x\Delta_k^\xi$, Δ_h^x, Δ_k^ξ 分别为关于 x,ξ 的二阶、一阶差分, 则称 $\sigma(x,\xi)$ 为局部域 K_p 上的一个**象征** (symbol); 局部域上的象征的全体, 记为 $S_{\rho\delta}^\alpha(K_p\times\Gamma_p)$, 并且赋予一定的运算结构与拓扑结构, 使其成为一个拓扑线性空间, 称 $S_{\rho\delta}^\alpha(K_p\times\Gamma_p)$ 为局部域 K_p 上的**象征类**.

K_p 与 Γ_p 是拓扑同构的, 故也把 $S_{\rho\delta}^\alpha(K_p\times\Gamma_p)$ 简记为 $S_{\rho\delta}^\alpha(K_p)$.

为了研究局部域 K_p 上的微积分, 需要如下性质:

定理 3.2.1 对于 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\rho\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$, 有

$$\sigma(x,\xi)=\langle\xi\rangle^\alpha\in S_{\rho\delta}^\alpha(K_p).$$

证明由直接验证 $\sigma(x,\xi)=\langle\xi\rangle^\alpha$ 满足定义 3.2.1 中的条件得到.

下面是象征类的分解定理.

定理 3.2.2 设 $\sigma(x,\xi)\in S_{\rho\delta}^m(K_p)$, 则对于 $m<0$, $\rho\geqslant 1$; 或 $m\leqslant 0$, $\rho>1$; 或 $m+3(1-\rho)<0$, 级数

$$\sigma(x,\xi)=\sum_{k,j=0}^{+\infty}\omega_{kj}(x)\varphi_{kj}(\xi)$$

绝对一致收敛, 其中

$$\omega_{kj}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\Gamma_p}\sigma(x,\xi)\Phi_{\Gamma^0}(\xi)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\mathrm{d}\xi, & j=0,\\ \displaystyle\int_{\Gamma_p}\sigma(x,\eta)\Phi_{\Gamma^0\setminus\Gamma^{-1}}(\xi)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\mathrm{d}\xi, & j>0\end{cases}$$

与 $|\eta|=p^j|\xi|$, 以及

$$\varphi_{kj}(\xi)=\begin{cases}\Phi_{\Gamma^0}(\xi)\chi_{v(k)}(\xi), & j=0,\\ \Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi)\chi_{v(k)}(\theta)=\Phi_{\Gamma^0\setminus\Gamma^{-1}}(\theta)\chi_{v(k)}(\theta), & j>0\end{cases}$$

与 $|\theta|=p^{-j}|\xi|$; $\{v(k)\}_{k=0}^{+\infty}$ 是紧群 $K_0\subset K_p$ 在 K_p 的陪集完全集, 且

$$\{v(k)\}_{k=0}^{+\infty}\leftrightarrow\left\{\chi_{v(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty},$$

这里特征集 $\left\{\chi_{v(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ 是紧群 $K_0=D$ 的完整直交集 [84].

证 这个定理的证明思路如下 [68],[80]:

(1) 首先用到四个引理.

① 设 $\gamma>0$, 则存在常数 $c>0$, 使得对于任意 $x\in K_p$ 且 $|x|>p^{-n}$, 有

$$\int_{|\xi|\leqslant p^n}\frac{|\chi_x(\xi)-1|}{|\xi|^{\gamma+1}}\mathrm{d}\xi\geqslant c|x|^\gamma.$$

② 对于 $j>0$, 有

$$|\chi_{v(k)}(\varsigma)-1||\omega_{kj}(x)|=\left|\int_{\Gamma_p}\Delta_\varsigma^\xi\sigma(x,\eta)\Phi_{\Gamma^j\backslash\Gamma^{j-1}}(\eta)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\mathrm{d}\xi\right|,$$

$$|\eta|=p^j|\xi|,\quad |\varsigma|<1.$$

于是, $\sigma(x,\xi)\in S^m_{\rho\delta}(K_p)$ 在引理的假设下的级数分解式

$$\sigma(x,\xi)=\sum_{k,j=0}^{+\infty}\omega_{kj}(x)\varphi_j(\xi)\chi_{v(k)}(p^j\xi)$$

一致收敛, 其中

$$\varphi_j(\xi)=\begin{cases}\Phi_{\Gamma^0}(\xi), & j=0,\\ \Phi_{\Gamma^j\backslash\Gamma^{j-1}}(\xi), & j>0\end{cases}$$

与

$$\omega_{kj}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\Gamma_p}\sigma(x,\xi)\Phi_{\Gamma^0}(\xi)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\mathrm{d}\xi, & j=0,\\ \displaystyle\int_{\Gamma_p}\sigma(x,\eta)\Phi_{\Gamma^0\backslash\Gamma^{-1}}(\xi)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\mathrm{d}\xi, & j>0.\end{cases}$$

③ 设 $h_{kj}(t)=\displaystyle\int_{\Gamma_p}\varphi_j(\xi)\chi_{p^jv(k)+t}(\xi)\mathrm{d}\xi,\ k,\ j\in\mathbb{P}$, 则有

$$\|h_{kj}\|_{L^1(K_p)}=\begin{cases}1, & j=0,\ k\geqslant 0,\\ 2(1-p^{-1}), & j\geqslant 1,\ k\geqslant 0.\end{cases}$$

④ 对于任意 $n\in\mathbb{P}$, 存在常数 $c>0$, 使得对于 $x\in K_p,\xi\in\Gamma_p$, 有

$$|\chi_\xi(x)-1|\leqslant c|x|^n|\xi|^n.$$

这四个引理的证明非常精致, 富有高度技巧性, 蕴含了局部域问题处理的特别方法. 由于篇幅限制, 这里省略其证明, 有兴趣的读者可参考相关文献.

(2) 现在证明定理.

由

$$\begin{aligned}|v(k)|^\gamma|\omega_{kj}(x)|&\leqslant\left(\int_{|\varsigma|<1}\frac{|\chi_{v(k)}(\varsigma)-1|}{|\varsigma|^{\gamma+1}}\mathrm{d}\varsigma\right)|\omega_{kj}(x)|\\&\leqslant\left(\int_{|\varsigma|<1}\frac{|\chi_{v(k)}(\varsigma)-1|\,|\omega_{kj}(x)|}{|\varsigma|^{\gamma+1}}\mathrm{d}\varsigma\right)\\&=\int_{|\varsigma|<1}\frac{1}{|\varsigma|^{r+1}}\left|\int_{\Gamma_p}\Delta_\varsigma^\xi\sigma(x,\eta)\Phi_{\Gamma^j\backslash\Gamma^{j-1}}(\eta)\bar{\chi}_{v(k)}(\xi)d\xi\right|\mathrm{d}\varsigma\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\int_{|\varsigma|<1} c_\gamma p^{j(m+(1-\rho)\gamma)} \mathrm{d}\varsigma \right) \leqslant c_\gamma p^{j(m+(1-\rho)\gamma)},$$

这蕴含

$$|\omega_{kj}(x)| \leqslant c_\gamma p^{j(m+(1-\rho)\gamma)} |v(k)|^{-\gamma}.$$

注意到, $|v(k)| \geqslant p$, 并选取适当的 γ, 便得到对于 $m<0$, $\rho \geqslant 1$; 或 $m \leqslant 0$, $\rho > 1$, 或 $m+3(1-\rho)<0$, 级数

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{k,j=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x) \varphi_{kj}(\xi)$$

绝对一致收敛. 定理得证.

3.2.2　局部域上的拟微分算子 T_σ

定义 3.2.2 (拟微分算子)　对于 $\sigma(x,\xi) \in S^\alpha_{\rho\delta}(K_p)$, 记

$$T_\sigma f(x) = \int_{\Gamma_p} \left\{ \int_{K_p} \sigma(x,\xi) f(t) \overline{\chi}_\xi(t-x) \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\xi \tag{3.2.1}$$

称 T_σ 为局部域 K_p 上的具有象征 $\sigma \in S^\alpha_{\rho\delta}(K_p)$ 的拟微分算子, 其中 $f: K_p \to \mathbb{C}$ 是 K_p 上的 Haar 可测函数.

这里不准备研究局部域 K_p 上拟微分算子的一般理论, 因为它的许多结果与 $\mathbb{R}^n$ 上的理论雷同. 本书的目的是利用 K_p 上拟微分算子理论来建立局部域 K_p 上的微积分, 并围绕这个主题, 建立一系列的有关局部域上的微积分基本理论.

据定理 3.2.1, 现在研究象征为 $\sigma(x,\xi) = \langle\xi\rangle^\alpha$ 的拟微分算子

$$T_\alpha f(x) \equiv \int_{\Gamma_p} \left\{ \int_{K_p} \langle\xi\rangle^\alpha f(t) \overline{\chi}_\xi(t-x) \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\xi, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.2.2}$$

这个算子在局部域的微积分理论中起关键作用.

1. 拟微分算子 T_α 在 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的性质

定理 3.2.3　对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 算子 T_α 是检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的同胚.

证　由于 (3.2.2), 对于 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 可表示为

$$T_\alpha \varphi(x) = \left(\langle\cdot\rangle^\alpha \varphi^\wedge(\cdot) \right)^\vee (x), \tag{3.2.3}$$

并且 Fourier 变换 $F: \varphi \to \varphi^\wedge$、逆变换 $F^{-1}: \varphi \to \varphi^\vee$、平移变换 $\tau_h: \varphi \to \tau_h\varphi$ 都是 $\mathbb{S}(K_p)$ 到 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的同胚, 故只要证明 $\langle\xi\rangle^\alpha \Phi_{\Gamma^k}(\xi) \in \mathbb{S}(\Gamma_p)$ 即可. 然而,

$$\langle\xi\rangle^\alpha \Phi_{\Gamma^k}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\Gamma^k}(\xi), & |\xi| \leqslant 1, \\ |\xi|^\alpha \Phi_{\Gamma^k}(\xi), & |\xi| > 1, \end{cases}$$

对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 它显然是 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 中的元. 从而定理得证.

局部域 K_p 上的函数类中, 还有一个基本函数类 $\mathbb{B}(K_p)$, 对于其中称为基本函数的元, 拟微分算子 T_α 有与定理 3.2.3 相同的性质.

定义 3.2.3 (基本函数类) 对于 K_p 上的复值 Haar 可测函数 $\psi : K_p \to \mathbb{C}$, 若满足

(i) 对任一非负整数 $N \in \mathbb{P}$, 存在常数 $c_N > 0$, 使得

$$|\psi(x)| \leqslant c_N \langle x \rangle^{-N}, \quad x \in K_p,$$

其中 $\langle x \rangle = \max\{1, |x|\}$;

(ii) 对任一对 $(\mu, N) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, 存在常数 $c_{\mu N} > 0$, 使得

$$|\Delta_h^x \psi(x)| \leqslant c_{\mu N} |h|^\mu \langle x \rangle^{-N}, \quad x, h \in K_p,$$

其中 $\Delta_h^x \psi(x) = \psi(x+h) - \psi(x)$, 则称 $\psi(x)$ 为局部域上的一个**基本函数**; 局部域上基本函数的全体, 记为 $\mathbb{B}(K_p)$, 赋予一定的拓扑结构, $\mathbb{B}(K_p)$ 成为一个拓扑线性空间, 称其为**基本函数类**, 或**基本函数空间**.

例 3.2.1 设 $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|}, & |x| > 1, \\ \mathrm{e}^{\frac{-1}{|x|}}, & |x| \leqslant 1, \end{cases}$ 易于验证 $\varphi \in \mathbb{B}(K_p)$.

定理 3.2.4 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 算子 T_α 是基本函数空间 $\mathbb{B}(K_p)$ 上的同胚.

证 本定理的证明较复杂, 这里叙述一下其证明大意.

(1) 首先给出两个性质:

① 设 $\gamma > 0$, 则存在常数 $c > 0$, 使得对于任意 $x \in K_p$ 且 $|x| > p^{-n}$, 有

$$\int_{|\xi| \leqslant p^n} \frac{|\chi_x(\xi) - 1|}{|\xi|^{\gamma+1}} \mathrm{d}\xi \geqslant c|x|^\gamma;$$

② 对于任意 $n \in \mathbb{P}$, 存在常数 $c > 0$, 使得对于 $x \in K_p$, $\xi \in \Gamma_p$, 有

$$|\chi_\xi(x) - 1| \leqslant c|x|^n |\xi|^n.$$

(2) 其次证明:

$$\psi \in \mathbb{B}(K_p) \Rightarrow T_\alpha \psi \in \mathbb{B}(K_p). \tag{3.2.4}$$

为证 (3.2.4), 分别考虑 $|x| \leqslant 1$ 与 $|x| > 1$ 两种情况, 并且利用 Fourier 变换的性质、算子 T_α 的定义、基本函数空间中元的定义与 (1) 中①与②, 便可证明: 对任意 $N \in \mathbb{P}$, 存在常数 $c_N > 0$, 使得

$$|T_\alpha \psi(x)| \leqslant c_N \langle x \rangle^{-N}, \quad x \in K_p,$$

并且对任意 $(\mu, N) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, 存在常数 $c_{\mu N} > 0$, 使得

$$|\Delta_h^x T_\alpha \psi(x)| \leqslant c_{\mu N} |h|^\mu \langle x \rangle^{-N}, \quad x, h \in K_p.$$

从而定理得证.

这个定理的详细证明, 可参看文献 [72], 这里不再赘述.

定理 3.2.5　平移、反射、Fourier 变换等运算都是基本函数空间 $\mathbb{B}(K_p)$ 上的同胚.

2. 拟微分算子 T_α 在 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 与 $\mathbb{B}^*(K_p)$ 上的延拓

算子 T_α 可以延拓到两个分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 与 $\mathbb{B}^*(K_p)$ 上.

定义 3.2.4(分布空间上的拟微分算子)　对于分布 $S \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 若

$$\langle T_\alpha S, \varphi \rangle = \langle S, T_\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

成立, 则 $T_\alpha S \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 是一个分布, 称 T_α 为作用在分布 $S \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 上的拟微分算子. 于是 T_α 成为分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的拟微分算子.

类似地, 定义作用在分布 $S \in \mathbb{B}^*(K_p)$ 上的拟微分算子为满足

$$\langle T_\alpha S, \psi \rangle = \langle S, T_\alpha \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathbb{B}(K_p)$$

的分布 $T_\alpha S$. 不难证明下述定理.

定理 3.2.6　拟微分算子 T_α 是分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 上的同胚, 也是 $\mathbb{B}^*(K_p)$ 上的同胚.

3.3　局部域 K_p 上的 p 型导数与 p 型积分

为了区分起见, 称局部域 K_p 上的导数与积分为 p 型导数与 p 型积分 (这种导数与积分, 起源于 Gibbs 导数与积分, 其简史参看 3.3.3 节), 是建立在局部域 K_p 的拟微分算子的概念与性质上的.

3.3.1　局部域 K_p 上函数的 p 型导数与 p 型积分

本小节给出局部域 K_p 上的 p 型导数与 p 型积分的定义与性质.

定义 3.3.1 (按点 p 型导数与 L^r 强 p 型导数)　设实数 $\alpha > 0$, 若对于局部域 K_p 上的复值 Haar 可测函数 $f: K_p \to \mathbb{C}$, 积分

$$T_\alpha f(x) \equiv \int_{\Gamma_p} \left\{ \int_{K_p} \langle \xi \rangle^\alpha f(t) \overline{\chi}_\xi(t-x) \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\xi \tag{3.3.1}$$

在 $x \in K_p$ 存在, 则称 $T_\alpha f(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x 的 α 阶按点 p 型导数, 简记为 $f^{\langle \alpha \rangle}(x)$.

为定义 L^r 强 p 型导数, 令

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant p^k, \\ 0, & |x| > p^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.2}$$

若存在 $g \in L^r(K_p), 1 \leqslant r < +\infty$ 使得

$$\lim_{k \to +\infty} \|g - T_\alpha f_k\|_{L^r(K_p)} = 0, \tag{3.3.3}$$

则称 $g \in L^r(K_p)$ 为 $f(x)$ 的 α 阶 L^r 强 p 型导数, 记为 $g = D^{\langle\alpha\rangle} f$.

类似地, 定义 p 型积分.

定义 3.3.2 (按点 p 型积分与 L^r 强 p 型积分) 设实数 $\alpha > 0$, 若对于局部域 K_p 上的复值 Haar 可测函数 $f : K_p \to \mathbb{C}$, 积分

$$T_{-\alpha} f(x) \equiv \int_{\Gamma_p} \left\{ \int_{K_p} \langle\xi\rangle^{-\alpha} f(t) \overline{\chi}_\xi(t - x) \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\xi \tag{3.3.4}$$

在 $x \in K_p$ 存在, 则称 $T_{-\alpha} f(x)$ 为$f(x)$ 在点 x 的 α 阶按点 p 型积分, 记为 $f_{\langle\alpha\rangle}(x)$.

为定义 L^r 强 p 型积分, 同样对于 (3.3.2) 中的 $f_k(x), k \in \mathbb{Z}$, 若存在 $h \in L^r(K_p)$, 使得

$$\lim_{k \to +\infty} \|h - T_{-\alpha} f_k\|_{L^r(K_p)} = 0, \tag{3.3.5}$$

则称 $h \in L^r(K_p)$ 为 $f(x)$ 的 α 阶 L^r 强 p 型积分, 记为 $h = I_{\langle\alpha\rangle} f$.

注 在以上定义中, 假设 $\alpha > 0$ 为实数, 因此所定义的导数与积分显然包含了整数阶与分数阶的导数与积分.

3.3.2 $\mathbb{S}(K_p)$ 函数的 p 型导数与 p 型积分的性质

将 (3.3.1) 与 (3.3.4) 定义的函数分别称为 $f(x)$ 的按点导数与按点积分, 但是, 为什么要用"导数"与"积分"这样的名称呢? 它们能否作为局部域上定义的函数的"导数"与"积分"呢? 下面从研究它们的性质开始, 来理解这种用法的合理性.

定理 3.3.1 若 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则 φ 是任意次 p 型按点可导的, 也是任意次 L^r 强 p 型可导的, 并且对于任意 $\alpha > 0$, 有

$$D^{\langle\alpha\rangle} \varphi(x) = \varphi^{\langle\alpha\rangle}(x) \in \mathbb{S}(K_p). \tag{3.3.6}$$

进而, φ 也是任意次 p 型按点可积与任意次 L^r 强 p 型可积的, 并且对于任意 $\alpha > 0$, 有

$$I_{\langle\alpha\rangle} \varphi(x) = \varphi_{\langle\alpha\rangle}(x) \in \mathbb{S}(K_p). \tag{3.3.7}$$

证 只证关于 p 型导数的结论, 对于 p 型积分可类似得到.

① $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 是任意次 p 型按点可导的. 事实上, 据定理 3.2.3, $\varphi^{\langle\alpha\rangle} \in \mathbb{S}(K_p)$, 因此, 对于任意实数 $\alpha > 0$, $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 是 α 阶 p 型可导的.

② $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 是任意次 L^r 强 p 型可导的. 事实上, 由强导数的定义, 令

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant p^k, \\ 0, & |x| > p^k. \end{cases}$$

显然, $\varphi_k \in \mathbb{S}(K_p)$, $T_\alpha\varphi_k(x) \in \mathbb{S}(K_p)$, 且由定理 3.1.4, $\mathbb{S}(K_p)$ 连续嵌入 $L^r(K_p)$, $\mathbb{S}(K_p) \subset L^r(K_p)$, $1 \leqslant r < +\infty$, 因此

$$\left\|T_\alpha\varphi_k(\cdot) - \varphi^{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right\|_{L^r(K_p)} \to 0, \quad k \to +\infty.$$

从而, $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 是任意次 L^r 强 p 型可导的, 且 $D^{\langle\alpha\rangle}\varphi(x) = \varphi^{\langle\alpha\rangle}(x)$.

这个定理的意义在于: 将 T_α 与 $T_{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ 分别视为"求导"与"积分"算子, 检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 中的函数 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 是任意次 p 型按点可导的与任意次 p 型强可导的, 也是任意次 p 型按点可积的与任意次 p 型强可积的, 并且 $\forall\alpha \in [0, +\infty)$, 成立

$$\varphi^{\langle\alpha\rangle}(x) = D^{\langle\alpha\rangle}\varphi(x), \quad \varphi_{\langle\alpha\rangle}(x) = I_{\langle\alpha\rangle}\varphi(x),$$

即 p 型导数与 p 型积分的运算在检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 中是封闭的.

$\mathbb{S}(K_p)$ 相当于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 空间, 它在局部域分析中类似于 Schwartz 空间在 $\mathbb{R}^n$ 分析中的作用.

注　(1) 对于基本函数空间 $\mathbb{B}(K_p)$, 定理 3.3.1 同样成立, 即对于 $\psi \in \mathbb{B}(K_p)$ 与 $\alpha \geqslant 0$, 同样有

$$D^{\langle\alpha\rangle}\psi(x) = \psi^{\langle\alpha\rangle}(x) \in \mathbb{B}(K_p)$$

与

$$I_{\langle\alpha\rangle}\psi(x) = \psi_{\langle\alpha\rangle}(x) \in \mathbb{B}(K_p).$$

(2) 由于定理 3.3.1, 今后只需考虑按点的 p 型导数与积分, 以后有关的定理与性质, 对强 p 型导数与积分都成立.

定理 3.3.2　若 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则对任意 $\alpha > 0$, 有 Fourier 变换公式:

$$\left[\varphi^{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right]^\wedge(\xi) = \langle\xi\rangle^\alpha\varphi^\wedge(\xi), \quad \xi \in \Gamma_p. \tag{3.3.8}$$

证　由

$$\begin{aligned}\varphi^{\langle\alpha\rangle}(x) &= \int_{\Gamma_p}\left\{\int_{K_p}\langle\xi\rangle^\alpha\varphi(t)\overline{\chi}_\xi(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\alpha\left\{\int_{K_p}\varphi(t)\overline{\chi}_\xi(t)\overline{\chi}_\xi(-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\alpha\chi_x(\xi)\left\{\int_{K_p}\varphi(t)\overline{\chi}_\xi(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\alpha\varphi^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi = \left(\langle\cdot\rangle^\alpha\varphi^\wedge(\cdot)\right)^\vee(x),\end{aligned}$$

故由 Fourier 变换的唯一性定理, 便可得到 (3.3.8), 定理得证.

这个定理的意义在于：公式 (3.3.8) 给出了检验函数空间中的函数 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的 p 型导数的 Fourier 变换公式, 它类似于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上函数导数的 Fourier 变换的公式.

定理 3.3.3 若 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则对于 $\alpha \geqslant 0$, 有

$$\left(\varphi^{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right)_{\langle\alpha\rangle}(x) = \varphi(x) = \left(\varphi_{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right)^{\langle\alpha\rangle}(x). \tag{3.3.9}$$

证 由导数与微分的定义、Fourier 变换唯一性定理以及定理 3.3.2, 就可证明本定理.

这个定理的意义在于：公式 (3.3.9) 揭示了 p 型导数与 p 型积分互为逆运算的本质性质.

定理 3.3.2 与定理 3.3.3 对于基本函数 $\psi \in \mathbb{B}(K_p)$ 都成立.

3.3.3 分布 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 的 p 型导数与 p 型积分

定义 3.3.3 (分布的 p 型导数) 设 $\alpha > 0$, 若对局部域 K_p 上的分布 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 存在一个分布 $S \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 使得

$$\langle S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi^{\langle\alpha\rangle}\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p), \tag{3.3.10}$$

则称*分布 S 为分布 T 的 α 阶 p 型导数*, 记为 $S = T^{\langle\alpha\rangle}$. 于是, 分布 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 的 α 阶 p 型导数是满足

$$\langle T^{\langle\alpha\rangle}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi^{\langle\alpha\rangle}\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $T^{\langle\alpha\rangle} \in \mathbb{S}^*(K_p)$.

若存在一个分布 $Q \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 使得当 $\alpha > 0$ 时,

$$\langle Q, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_{\langle\alpha\rangle}\rangle \tag{3.3.11}$$

对每个 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 成立, 则称*分布 Q 为分布 T 的 α 阶 p 型积分*, 记为 $Q = T_{\langle\alpha\rangle}$. 换言之, 分布 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 的 α 阶 p 型积分是满足

$$\left\langle T_{\langle\alpha\rangle}, \varphi\right\rangle = \left\langle T, \varphi_{\langle\alpha\rangle}\right\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

的分布 $T_{\langle\alpha\rangle} \in \mathbb{S}^*(K_p)$.

由 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 的 p 型导数与 p 型积分的性质, 可证明如下定理：

定理 3.3.4 若 $T \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 则对任意 $\alpha > 0$, 成立在分布意义下的等式：

$$\left(T^{\langle\alpha\rangle}\right)_{\langle\alpha\rangle} = T = \left(T_{\langle\alpha\rangle}\right)^{\langle\alpha\rangle}. \tag{3.3.12}$$

证 对于分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 任取 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 由定义与定理 3.3.3, 有

$$\left\langle\left(T^{\langle\alpha\rangle}\right)_{\langle\alpha\rangle},\varphi\right\rangle=\left\langle T^{\langle\alpha\rangle},\varphi_{\langle\alpha\rangle}\right\rangle=\left\langle T,\left(\varphi_{\langle\alpha\rangle}\right)^{\langle\alpha\rangle}\right\rangle=\left\langle T,\left(\varphi^{\langle\alpha\rangle}\right)_{\langle\alpha\rangle}\right\rangle$$
$$=\left\langle T_{\langle\alpha\rangle},\varphi^{\langle\alpha\rangle}\right\rangle=\left\langle\left(T_{\langle\alpha\rangle}\right)^{\langle\alpha\rangle},\varphi\right\rangle.$$

式 (3.3.12) 得证.

这个定理的意义在于: 分布意义下的 p 型导数与 p 型积分互为逆运算.

定理 3.3.5 若 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 则对任意 $\alpha>0$, 成立在分布意义下的等式

$$\left[T^{\langle\alpha\rangle}\right]^{\wedge}=\langle\xi\rangle^{\alpha}T^{\wedge}.\tag{3.3.13}$$

证 对于分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的 α 阶 p 型导数 $T^{\langle\alpha\rangle}$, 任取 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 满足

$$\left\langle T^{\langle\alpha\rangle},\varphi\right\rangle=\left\langle T,\varphi^{\langle\alpha\rangle}\right\rangle.$$

考虑到 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)\leftrightarrow\varphi^{\wedge}\in\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 并且 $(\varphi^{\wedge})^{\wedge}=\widetilde{\varphi}$, 有

$$\left\langle(T^{\langle\alpha\rangle})^{\wedge},\varphi^{\wedge}\right\rangle=\left\langle T^{\langle\alpha\rangle},(\varphi^{\wedge})^{\wedge}\right\rangle=\left\langle T^{\langle\alpha\rangle},\widetilde{\varphi}\right\rangle=\left\langle T,(\widetilde{\varphi})^{\langle\alpha\rangle}\right\rangle.$$

由于

$$(\widetilde{\varphi}(x))^{\langle\alpha\rangle}=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^{\alpha}\left\{\int_{K_p}\widetilde{\varphi}(t)\overline{\chi}_{\xi}(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^{\alpha}\left\{\int_{K_p}\widetilde{\varphi}(t)\overline{\chi}_{\xi}(t)\mathrm{d}t\right\}\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^{\alpha}\varphi^{\wedge}(-\xi)\dot{\chi}_x(\xi)\mathrm{d}\xi=\left[\langle\cdot\rangle^{\alpha}\varphi^{\wedge}(\cdot)\right]^{\vee}(-x),$$

从而, 据定理 3.1.23(5)

$$\left\langle\left(T^{\langle\alpha\rangle}\right)^{\wedge},\varphi^{\wedge}\right\rangle=\left\langle T,(\widetilde{\varphi})^{\langle\alpha\rangle}\right\rangle=\left\langle T,\left[\left(\langle\cdot\rangle^{\alpha}\varphi^{\wedge}(\cdot)\right)^{\vee}\right]^{\sim}\right\rangle=\langle T^{\wedge},\langle\cdot\rangle^{\alpha}\varphi^{\wedge}\rangle=\langle\langle\cdot\rangle^{\alpha}T^{\wedge},\varphi^{\wedge}\rangle,$$

因此 $\left(T^{\langle\alpha\rangle}\right)^{\wedge}=\langle\xi\rangle^{\alpha}T^{\wedge}$ 在分布意义下成立. 定理得证.

这个定理的意义在于: 它是分布 $T\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 导数 $T^{\langle\alpha\rangle}$ 的 Fourier 变换 $\left(T^{\langle\alpha\rangle}\right)^{\wedge}$ 的公式.

下面给出一个重要的例子.

例 3.3.1 求特征 $\chi_{\xi}(x)$ 的 α 阶 p 型导数, $\alpha>0$.

解 由于 $\chi_{\xi}(x)$ 并不属于 $\mathbb{S}(K_p)$, 也不具有紧支集, 利用

$$\chi_{\xi}(x)\in L_{\mathrm{loc}}(K_p)\subset\mathbb{S}^*(K_p),$$

先求其 Fourier 变换, 再利用定理 3.3.5, 求 $\left(\chi_{\xi}(\cdot)\right)^{\langle\alpha\rangle}(x)$.

对于任意的 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 有

$$\begin{aligned}\left\langle (\chi_\xi)^\wedge, \varphi^\wedge \right\rangle &= \left\langle \chi_\xi, (\varphi^\wedge)^\wedge \right\rangle = \langle \chi_\xi, \widetilde{\varphi} \rangle = \int_{K_p} \chi_\xi(x)\varphi(-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{K_p} \varphi(-x)\overline{\chi}_\xi(-x)\mathrm{d}x = \int_{K_p} \varphi(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &= \varphi^\wedge(\xi) = \langle \delta_\xi, \varphi^\wedge \rangle,\end{aligned}$$

得到 $(\chi_\xi)^\wedge = \delta_\xi$. 此即 $\chi_\xi = (\delta_\xi)^\vee$ (δ_ξ 的定义见例 3.1.10), 利用定理 3.3.4, 有

$$\left[(\chi_\xi)^{\langle \alpha \rangle} \right]^\wedge = \langle \xi \rangle^\alpha (\chi_\xi)^\wedge = \langle \xi \rangle^\alpha \delta_\xi,$$

因此

$$(\chi_\xi)^{\langle \alpha \rangle} = [\langle \cdot \rangle^\alpha \delta_\xi]^\vee. \tag{3.3.14}$$

继而, 我们要证明 $[\langle \cdot \rangle^\alpha \delta_\xi]^\vee = \langle \xi \rangle^\alpha [\delta_\xi]^\vee = \langle \xi \rangle^\alpha \chi_\xi$. 事实上, 任取 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 作

$$\begin{aligned}\left\langle [\langle \cdot \rangle^\alpha \delta_\xi]^\vee, \varphi \right\rangle &= \langle \langle \cdot \rangle^\alpha \delta_\xi, \varphi^\vee \rangle = \langle \delta_\xi, \langle \cdot \rangle^\alpha \varphi^\vee \rangle = \langle \xi \rangle^\alpha \varphi^\vee(\xi) \\ &= \langle \xi \rangle^\alpha \langle \delta_\xi, \varphi^\vee \rangle = \langle \xi \rangle^\alpha \langle \delta_\xi^\vee, \varphi \rangle = \langle \langle \xi \rangle^\alpha \delta_\xi^\vee, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

代入 (3.3.14), 得到

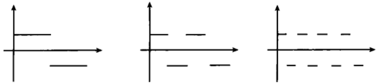
$$(\chi_\xi)^{\langle \alpha \rangle} = \langle \xi \rangle^\alpha \chi_\xi. \tag{3.3.15}$$

这个例子的意义在于：公式 (3.3.15) 说明, 特征 χ_ξ 是 p 型导数的固有方程的固有函数, $\lambda = \langle \xi \rangle$, $\xi \in \Gamma_p$ 是固有值. 下面会看到, 为定义“导数”, 需要确定“准则”, 而以固有方程、固有函数、固有值形成一个整体, 成为“准则”中的重要组成部分.

3.3.4 局部域上微积分建立的历史回顾

1. 新问题的提出与解决 ——“逻辑导数”与“远场”的变化率

图中的一组函数序列, 工程上称为开关函数, 是 19 世纪由法国数学家 Radamacher 定义并研究过的函数系, 称之为 Radamacher 函数系. 作为一列信号, 求经典导数是无实际意义的, 因为在函数的跳跃点上, 经典导数不存在, 在非跳跃点上, 经典导数为零. 但是, 信号的传输速度始终存在, 因此, 求这类函数的变化率问题, 就这样摆到科学家的面前 [7],[19].



1969 年, 英国国家海军实验室里工作的 Gibbs 教授与其合伙人 Millard 教授在国家海军实验室报告中 [16],[17], 发表了题为“Walsh functions as solution of logical differential equations”等 2 篇论文, 用 Galois 域论观点给出了有限二进群 $G_0 = \{0,1\}$ 上定义的函数的“逻辑导数”, 并且给出“逻辑微分方程”的解; 1971 年又进行推广 [18], 发表了“Some generalizations of the logical derivatives”. 因此, 此后的研究者常把这种类型的导数称为“逻辑导数”或“Gibbs 导数”.

1973 年, 德国数学家 Butzer 与他的学生进行了更深刻的研究, 发表了“Walsh-Fourier series and the concept of a derivative” [10], 给出如下定义:

设 $G_0 = \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots): x_k \in \{0,1\},\ k \in \mathbb{P}\}$ 为紧 2 进 Abel 群, $f: G_0 \to \mathbb{C}$ 为 G_0 上的复值 Haar 可测函数, 令

$$e_j = (x_k^j), \quad x_k^j \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad j,\ k \in \mathbb{N}.$$

若对于 $x \in G_0$, 级数

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{+\infty} 2^j \{f(x \oplus e_{j+1}) - f(x)\} \tag{3.3.16}$$

收敛, 则称和函数为 $f(x)$ 在点 x 的“按点逻辑导数”, 记为 $f^{\langle 1 \rangle}(x)$. 如果级数依 $L^r(G_0)$, $1 \leqslant r < +\infty$ 意义下收敛, 将其和记为 $D^{\langle 1 \rangle}f(x)$, 则称 $D^{\langle 1 \rangle}f(x)$ 为 $f(x)$ 的“$L^r(G_0)$ 强逻辑导数”.

高阶逻辑导数用归纳法定义.

紧接着, 匈牙利数学家 Pal, Simon, Gat, 美国数学家 Onneweer[38], 塞尔维亚数学家 Stankovic[53],[54] 等, 以及中国的郑维行、苏维宜 [7],[59],[74],[82] 等也积极开展了这个有吸引力的研究课题.

注　为何不类似经典导数, 用差商 $\dfrac{f(x \oplus \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 的极限作为 $f(x)$ 的导数, 而用 (3.3.16) 中的“级数和”? 这是因为:

① 当 $\Delta x \to 0$ 时, 对于像 Radamacher 函数这样类型的函数, 差商 $\dfrac{f(x \oplus \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 的极限仍然是零,并不能反映函数的变化率.

② (3.3.16) 可改写为

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \{f(x \oplus e_{j+1}) - f(x)\},$$

注意到, $x \oplus e_{j+1}$ 与 x 的“2 进差”(即 $\oplus$ 的逆运算) 恰巧是 e_{j+1}, 对应于 2^{-j-1}, 而对于紧 2 进 Abel 群 G_0, 函数的增量正是 $f(x \oplus e_{j+1}) - f(x)$. 但是, 由于群 G_0 是

全不连通的, 考虑一点附近的变化率没有意义, 必须考虑整体变化率, 而 (3.3.16) 正是这种整体变化率的一种刻画.

③ 导数性质不仅体现在"变化率"上, 还体现在它的逆运算上, 即作为一种"运算", 应当有逆运算. 因此要有"按点逻辑积分"、"强逻辑积分"与"按点逻辑导数"、"按点逻辑积分"相对应. 例如, 强逻辑积分定义为: 令

$$W^\wedge(k)=\begin{cases}k^{-1}, & k\in\mathbb{N},\\ 0, & k=0.\end{cases}$$

称

$$I_{\langle 1\rangle}f(x)=W*f(x)=\int_{G_0}f(t)W(t-x)\mathrm{d}t$$

为 $f(x)$ 的"$L^r(G_0)$ 强逻辑积分", 这里卷积运算中的"$-$"号是指 2 进加法运算 $\oplus$ 的逆运算. 可以证明, 在一定的条件下, 有

$$I_{\langle 1\rangle}\left(D^{\langle 1\rangle}f\right)=f,\quad D^{\langle 1\rangle}\left(I_{\langle 1\rangle}f\right)=f.$$

④ 新定义的导数在一定的条件下, 满足 Fourier 变换公式

$$\left(D^{\langle 1\rangle}f\right)^\wedge(k)=kf^\wedge(k),\quad k\in\mathbb{P}.$$

⑤ 还有一个更重要的性质: 紧群 G_0 上的固有方程是

$$y^{\langle 1\rangle}(x)=\lambda y(x);$$

固有函数系就是熟知的 Walsh 函数系

$$\{w_k(x):k\in\mathbb{P}\},\quad x\in G_0;$$

固有值则是 $\lambda=k,\ k\in\mathbb{P}$.

这是导数所应满足的更深层次的性质之一. 它的重要意义在于: 有导数定义, 就有固有方程, 这种方程反映了"运动"是由固有方程的"基本解"叠加而成的, 而这些基本解就是"固有函数", 物理学家称为"本征函数". 相应的数学意义是: 固有函数是群 G_0 的特征, 即是群 G_0 的特征群 Γ_0 中的元.

⑥ 最后, 有正逆逼近定理与等价性定理. 这里只叙述 $X(G_0)$ 上的等价性定理. 对于 $\alpha>0$ 与 $s\in\mathbb{P}$, 下列四个事实彼此等价:

(i) $f^{\langle s\rangle}\in$ Lip $(X(G_0),\alpha)$;

(ii) $\omega(X(G_0),f^{\langle s\rangle},2^{-n})=O(2^{-n\ \alpha}),n\to+\infty$;

(iii) $E_{2^n}(X(G_0),f)=O(2^{-n(\alpha+s)}),\ n\to+\infty$;

(iv) $\|f(\cdot)-S_{2^n}(f,\cdot)\|_{X(G_0)}=O(2^{-n(\alpha+s)}),\ n\to+\infty$,

其中 Lip, ω, E_{2^n} 与 S_{2^n} 分别为空间 $X(G_0)=\begin{cases}C(G_0),\\ L^r(G_0), & 1\leqslant r<+\infty\end{cases}$ 上的 Lip 类、连续模、最佳逼近与 Fourier 级数的 2^n 部分和. 这是导数所应满足的更深层次的性质之二. 因为"函数逼近论"又称"函数构造论", 给函数以实质性的刻画, 例如, 正、逆逼近定理 (即 Jackson 定理与 Bernstein 定理) 描述了函数与导数的深刻关系: 最佳逼近趋于 0 的速度越快, 函数的光滑程度越高; 反之, 函数的光滑程度越高, 其最佳逼近趋于 0 的速度越快. 因此, 要建立新的导数概念, 就必定要反映出这个深刻性质.

与此同时, 物理学家们也发现, 在无线电发射的远场, Gibbs 导数代表电磁波的大范围的变化率.

2. p 进分析成为局部域分析的基础 —— Walsh 系的研究及其发展

1978—1983 年, 郑维行、苏维宜、任福贤获得了 p 进情形下 Walsh 系的结果 [48],[60]~[62],[100]~[103],[106],[107].

对于素数 $p\geqslant 2$, 令

$$G=\Big\{x=(x_{-s},x_{-s+1},\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots):x_j\in\big\{0,1,\cdots,p-1\big\},\\ j\geqslant -s,s\in\mathbb{P}\Big\},$$

易知, 在 mod p 运算下, 群 G 成为局部紧、全不连通、非平凡的拓扑群, 它可与局部域 K 的加群视为同构, $G\leftrightarrow K^+$. 设 $f:G\to\mathbb{C}$ 为 G 上的 Haar 可测复值函数, 欲建立它的变化率, 应当考虑到:

(i) 变化率是整体的而不是局部的, 也就是说, 这类函数在一点的变化率不仅只受它附近点的函数值变化的影响, 而且受整个定义域内各点的函数值变化的影响;

(ii) 变化率是定义域内各点函数值的某种线性组合与自变量变化的比值的极限;

(iii) 变化率应当满足如前面对于 G_0 所提到的"准则"③ ~ ⑥.

经过研究与计算, 对于 $x\in G$, 把定义 (3.3.16) 进行推广, 得到: 对于 p 进局部紧群 G 上的复值 Haar 可测函数 $f:G\to\mathbb{C}$, $\forall N\in\mathbb{N}$, 作和

$$\sum_{k=-N}^{+N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus j\,p^{-k-1})\right\},\tag{3.3.17}$$

其中 $A_0=\dfrac{p-1}{2}$, $A_k=\dfrac{\omega^k}{1-\omega^k}$, $k=1,2,\cdots,p-1;\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}}$. 若 $N\to+\infty$, (3.3.17)

式中的和式收敛, 将其极限函数记为 $f^{\langle 1\rangle}(x)$, 并称此函数 $f^{\langle 1\rangle}(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x 的"按点逻辑导数".

$\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x+j\,p^{-k-1})$ 是函数值的某种有限线性组合, 而 $p^k=\frac{1}{p}\frac{1}{p^{-k-1}}$ 则视为自变量的增量 $(x\oplus j\,p^{-k-1})-(x\oplus(j-1)p^{-k-1})$, 并且记

$$p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x\oplus jp^{-k-1})\right\}=\frac{1}{p}\frac{\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x\oplus jp^{-k-1})}{p^{-k-1}},$$

再对 k 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和, 这就涵盖了局部域 K_p 的所有点对点 x 的影响, 即整体变化率.

如果 (3.3.17) 中的和式在 $L^r(G)$ $(1\leqslant r\leqslant+\infty)$ 意义下收敛, 则其极限函数称为 $f(x)$ 的"$L^r(G)$ 强逻辑导数", 记为 $D^{\langle 1\rangle}f(x)$. 高阶逻辑导数按归纳法定义.

"按点逻辑积分"与"$L^r(G)$ 强逻辑积分"分别定义为卷积

$$V_n * f(x)=\int_G V_n(t-x)f(t)\mathrm{d}t$$

当 $n\to+\infty$ 的按点极限与 $L^r(G)$ 强极限, 其中

$$V_n^{\wedge}(t)=\begin{cases} t^{-1}, & t\in[p^{-n},+\infty),\\ 0, & t\in[0,p^{-n}).\end{cases}$$

此后, 郑维行等陆续的工作完成了 Walsh 系 p 进局部紧群 G 上逻辑导数与积分的各种性质的证明 [66],[104],[108].

1981—1989 年, 何泽霖定义了紧 Walsh 系的 a 进情形的导数、积分, 并证明了相应的性质, 这里 $a=(\cdots,p_{-s},p_{-s+1},\cdots,p_{-1},p_0,p_1,\cdots)$, $p_j\geqslant 2$ 为素数, 表示每次进位的素数 p_j 可以不相同 [21]~[25].

1985 年, 郑维行定义了局部域 K 上的 p 进导数与积分 [110], 证明了相应的性质; 1990 年, 郑维行、苏维宜、江惠坤完善了这种导数与积分的定义及性质 [99].

1993 年, 江惠坤定义了局部紧群 a 进情形的导数与积分, 并证明了相应的性质 [28].

局部域上的调和分析从此开始了新的历程, 并且获得了非常有意义的科研成果, 参见文献 [27], [58], [63]~[65], [67]~[70], [75]~[81], [89], [90], [94]~[98], [109]~[113], [121]~[130].

3. *局部域分析上的微积分 —— 性质一览*

以上关于导数与积分的定义, 包括 Gibbs, Butzer, Onneweer, Gat, Stankovic, 郑维行等, 都是用级数的形式来定义的. 1992 年, 苏维宜利用局部域上的拟微分算

子, 定义了 p 型导数与 p 型积分, 并利用检验函数类 $\mathbb{S}(G)$ 与基本函数类 $\mathbb{B}(G)$ 对这种导数运算的封闭性, 将导数推广到分布情形, 证明了 p 型导数与 p 型积分的基本性质 [72].

为了归纳出定义新"导数"与新"积分"所应满足的准则, 下面再整理局部域上的 p 型导数与 p 型积分的性质.

(1) p 型导数与 p 型积分互为逆运算.

对于任意 $\alpha > 0$, 有

$$\left(\varphi^{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right)_{\langle\alpha\rangle}(x) = \varphi(x) = \left(\varphi_{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right)^{\langle\alpha\rangle}(x), \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

与

$$\left(T^{\langle\alpha\rangle}\right)_{\langle\alpha\rangle} = T = \left(T_{\langle\alpha\rangle}\right)^{\langle\alpha\rangle}, \quad \forall T \in \mathbb{S}^*(K_p).$$

(2) p 型导数的 Fourier 变换公式.

对于任意 $\alpha > 0$, 有

$$\left[\varphi^{\langle\alpha\rangle}(\cdot)\right]^{\wedge}(\xi) = \langle\xi\rangle^{\alpha}\varphi^{\wedge}(\xi), \quad \xi \in \Gamma_p, \ \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$$

与

$$\left[T^{\langle\alpha\rangle}\right]^{\wedge} = \langle\xi\rangle^{\alpha}T^{\wedge}, \quad \forall T \in \mathbb{S}^*(\Gamma_p).$$

(3) G 上的固有方程、固有函数与固有值.

对于 p 型导数, 寻求满足 $y^{\langle 1\rangle} = \lambda y$ 的函数 $y = f(x)$, 就是

$$f^{\langle 1\rangle}(x) = \langle\xi\rangle f(x)$$

为固有方程, $\{\chi_\xi(\cdot) : \xi \in \Gamma_p\} \xleftrightarrow{\text{一对一, 映上}} \Gamma_p$ 为固有函数集 (见 (3.3.15) 式), 而 $\langle\xi\rangle$, $\xi \in K_p$ 为固有值. 这是导数所应满足的更深层次的性质之一.

(4) $X(G)$ 上的逼近等价性定理.

对于 $\alpha > 0$ 与 $s \in \mathbb{P}$, 下列事实彼此等价:

(i) $f^{\langle s\rangle} \in \text{Lip}(X(G), \alpha)$;

(ii) $\omega(X(G), f^{\langle s\rangle}, p^{-n}) = O(p^{-n\ \alpha}), n \to +\infty$;

(iii) $E_{p^n}(X(G), f) = O(p^{-n(\alpha+s)}), \ n \to +\infty$,

其中 Lip, ω, E_{p^n} 分别为 $X(G) = \begin{cases} C(G), \\ L^r(G), \quad 1 \leqslant r < +\infty \end{cases}$ 上的 Lip 类、连续模、最佳逼近. 这个性质体现了函数越"光滑", 最佳逼近趋于零的速度"越快", 反之亦然. 这是导数所应满足的更深层次的性质之二.

以后将会看到局部域上的 p 型导数与 p 型积分在局部域调和分析中的应用.

3.4 局部域 K_p 上的算子与函数逼近理论

局部域 K_p 上的算子与函数逼近理论, 正如欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的函数构造理论是调和分析不可分割的部分一样, 也是局部域分析的重要组成部分.

3.4.1 局部域 K_p 上的算子理论

1. 算子的型

定义 3.4.1 (强 (r,s) 型算子、弱 $(1,1)$ 算子) 局部域 K_p 上的线性算子 $T: L^r(K_p) \to L^s(K_p)$ 称为强 (r,s) 型算子, $1 \leqslant r,s \leqslant +\infty$, 若存在常数 $c>0$, 使得

$$\|Tf\|_s \leqslant c\|f\|_r, \quad \forall f \in L^r(K_p). \tag{3.4.1}$$

也称算子 T 将 $L^r(K_p)$ 连续地嵌入到 $L^s(K_p)$ 中.

若对于任意给定的 $\lambda>0$, 存在常数 $c>0$, 使得

$$|\{x \in K_p : Tf(x) > \lambda\}| \leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}, \tag{3.4.2}$$

则称算子 T 为弱 $(1,1)$ 型算子.

2. H-L 极大算子

在 3.1 节中, 定义 3.1.10 给出了 Hardy-Littlewood 极大算子 M: $\forall g \in L_{\text{loc}}(K_p)$,

$$Mg(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{p^{-k}} \int_{x+B^k} |g(z)|\,\mathrm{d}z = \sup_{\substack{x\in S \\ S:K_p\text{中的球}}} \frac{1}{|S|}\int_S |g(z)|\mathrm{d}z.$$

定理 3.1.14 证明算子 M 是弱 $(1,1)$ 型算子: 若 $f \in L^1(K_p)$, 则 $\forall\lambda>0$, 有

$$|\{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{c}{\lambda}\|f\|_1. \tag{3.4.3}$$

现在证明, H-L 极大算子 M 也是强 (r,r) 型算子.

定理 3.4.1 局部域 K_p 上的 H-L 极大算子 M 是强 $(r,r), r \geqslant 1$ 型算子: 存在常数 $c>0$, 使得算子 $M: L^r(K_p) \to L^r(K_p)$ 满足

$$\|Mf\|_{L^r(K_p)} \leqslant c\|f\|_{L^r(K_p)}, \quad \forall f \in L^r(K_p). \tag{3.4.4}$$

证 为证不等式 (3.4.4), 取 $\lambda>0$, 并记

$$E_\lambda = \{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\}.$$

对于 $x \in E_\lambda$, 必存在球 S, 使得 $x \in S$, 且

$$\frac{1}{|S|}\int_S |f(t)|\mathrm{d}t > \lambda \tag{3.4.5}$$

(因若不然, 就将有 $Mf(x) \leqslant \lambda$), 记所有满足 (3.4.5) 的球的全体为 $\{S_x\}_{x\in E_\lambda}$, 则

$$\bigcup_{x\in E_\lambda} S_x \supset E_\lambda.$$

另一方面, 由 Wiener 覆盖定理 3.1.13, 存在不相交的有限个球 $\{S_j\}_{j=1}^N \subset \bigcup\limits_{x\in E_\lambda} S_x$, 使得对于 η, $0<\eta<1$, 有

$$\eta|E_\lambda| < \sum_{j=1}^N |S_j| < \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^N \int_{S_j} |f(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_{\bigcup\limits_{j=1}^N S_j} |f(t)|\mathrm{d}t$$

(据 (3.4.5), $|S| < \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_S |f(t)|\mathrm{d}t$). 从而

$$|E_\lambda| = |\{x\in K_p : Mf(x) > \lambda\}| < \frac{1}{\eta\lambda}\int_{\bigcup\limits_{j=1}^N S_j} |f(t)|\mathrm{d}t \equiv \frac{c}{\lambda}\int_{\bigcup\limits_{j=1}^N S_j} |f(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.4.6}$$

再由于在每个 S_j 上, 有 $|S_j| < \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_{S_j} |f(t)|\mathrm{d}t$, 即 $x \in S_j$, 有 $Mf(x) > \lambda$, 这表示包含关系 $\bigcup\limits_{j=1}^N S_j \subset E_\lambda$ 成立, 故 (3.4.6) 式化为

$$|E_\lambda| \leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{E_\lambda} |f(t)|\mathrm{d}t, \tag{3.4.7}$$

即

$$|\{x\in K_p : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{x\in K_p : Mf(x)>\lambda\}} |f(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.4.8}$$

这个不等式是非常有用的.

进而, 由

$$K_p = \left\{x\in K_p : |f(x)| \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\} \bigcup \left\{x\in K_p : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \equiv G_1 \bigcup G_2$$

得到分解式

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

其中

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x\in G_1, \\ 0, & x\in G_2, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x\in G_1, \\ f(x), & x\in G_2. \end{cases}$$

显然, $Mf_1(x) \leqslant \frac{\lambda}{2}$, 故

$$\{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in K_p : Mf_2(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

于是, 将 (3.4.8) 用于 $f_2(x)$, 得到

$$\begin{aligned}|\{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\}| &\leqslant \left|\left\{x \in K_p : Mf_2(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leqslant \frac{2c}{\lambda}\int_{G_2}|f_2(x)|\mathrm{d}x = \frac{2c}{\lambda}\int_{G_2}|f(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此, 得到另一个重要的不等式

$$|\{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{c'}{\lambda}\int_{\left\{x\in K_p:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{3.4.9}$$

为证明算子 M 是强 (r,r) 型算子, 利用调和分析中一个积分恒等式 [51], 就得到

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{L^r(K_p)}^r &= r\int_0^{+\infty}\lambda^{r-1}|\{x \in K_p : Mf(x) > \lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant r\int_0^{+\infty}\lambda^{r-1}\frac{c}{\lambda}\int_{\left\{x\in K_p:\ |f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda \\ &= cr\int_0^{+\infty}\lambda^{r-2}\int_{\left\{x\in K_p:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda \\ &= cr\int_{K_p}|f(x)|\left\{\int_0^{2|f|}\lambda^{r-2}\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}x \\ &= cr\int_{K_p}|f(x)|\frac{1}{r-1}(2|f(x)|)^{r-1}\mathrm{d}x \\ &= c'\frac{r}{r-1}\int_{K_p}|f(x)|^r\mathrm{d}x = c'r'\,\|f\|_{L^r(K_p)}^r,\end{aligned}$$

由此得到不等式 (3.4.4). 定理得证.

关于局部域 K_p 上的算子理论, 从抽象调和分析的观点, $(K_p, \mathbb{F}, \mathrm{d}\mu)$ 作为一个测度空间, 可以进行各种研究. 与欧氏空间情形相比较, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上有非常成熟的算子理论, 局部域 K_p 在这方面却非常年轻, 还有很多课题值得研究, 例如, 局部域 K_p 上的奇异积分算子理论、乘子理论, 等等, 仅仅有很初步的结果, 这里不再介绍.

3.4.2　局部域 K_p 上的函数逼近理论

1. *局部域 K_p 的紧群 $D \subset K_p$ 上的函数逼近*

与经典的 Fourier 级数情形相类似, 在紧群 $D = \{x \in K_p : |x| \leqslant 1\}$ 上可以引入标准完整直交系 $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$.

设 $\chi \in \Gamma_p$ 是局部域 K_p 上的一个基本特征, 它在 D 上平凡 $(\chi|_D \equiv 1)$, 在 B^{-1} 上非平凡 $(\chi|_D \not\equiv 1)$. χ 在 D 上的限制记为 $\chi|_D$. 特征群 Γ_p 与 K_p 在对应关系

$$\chi_u \in \Gamma_p \leftrightarrow u \in K_p$$

之下成为同构, 其中

$$\chi_u(x) = \chi(ux), \quad x \in K_p. \tag{3.4.10}$$

定理 3.4.2　由 (3.4.10) 确定的 χ_u, $u \in K_p$, 具有如下性质:

(1) $\chi_u|_D \in \Gamma_G$;

(2) $\chi_u|_D = \chi_v|_D \Leftrightarrow u - v \in D$.

证　(1) 成立, 因为 D 是 K_p 的子群.

为证 (2), 只需作如下推理:

$$\begin{aligned}\chi_u|_D = \chi_v|_D &\Leftrightarrow \chi_u|_D(x) = \chi_v|_D(x),\ \forall x \in D\\ &\Leftrightarrow 1 = [\chi_u|_D(x)]\left[(\chi_v|_D)(x)\right]^{-1} = \left\{[\chi_u|_D]\left[(\chi_v|_D)^{-1}\right]\right\}(x)\\ &= \left[(\chi_u)(\chi_v)^{-1}\right]\big|_D(x) = [(\chi_u)(\chi_{-v})]|_D(x) = \chi_{u-v}|_D(x)\\ &\Leftrightarrow u - v \in D.\end{aligned}$$

由此定理可以断言: 若 $\{u(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 是 D 在 K_p 的加群 K_p^+ 中的不同陪集的代表元的完整族, 则 $\{\chi_{u(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$ 就是 D 上特征的一个完整族.

定理 3.4.3　设 $\{u(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 是紧群 D 在 K_p 中的陪集的完整族, 则 $\{\chi_n \equiv \chi_{u(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$ 是 D 的特征的完整族, 并且 $\{\chi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是 D 上的*标准完整直交系*.

现在给出 $\{u(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 的一种"自然排序".

作紧群 D 在 K_p 中的陪集的*完全族*$\{B^{-k}/D : k \in \mathbb{N}\}$, 具体如下:

$$B^{-1}/D = \{0 \cdot \beta^{-1} + D, 1 \cdot \beta^{-1} + D, \cdots, (p-1) \cdot \beta^{-1} + D\};$$

$$\begin{aligned}B^{-2}/D = \{&0 \cdot \beta^{-2} + 0 \cdot \beta^{-1} + D, 0 \cdot \beta^{-2} + 1 \cdot \beta^{-1} + D, \cdots, 0 \cdot \beta^{-2} + (p-1) \cdot \beta^{-1} + D,\\ &1 \cdot \beta^{-2} + 0 \cdot \beta^{-1} + D, 1 \cdot \beta^{-2} + 1 \cdot \beta^{-1} + D, \cdots, 1 \cdot \beta^{-2} + (p-1) \cdot \beta^{-1} + D,\\ &\cdots\cdots\\ &(p-1) \cdot \beta^{-2} + 0 \cdot \beta^{-1} + D, (p-1) \cdot \beta^{-2} + 1 \cdot \beta^{-1} + D, \cdots,\\ &(p-1) \cdot \beta^{-2} + (p-1) \cdot \beta^{-1} + D\};\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

显然, 这是一个可数集, 记

$$u(0) = 0 \cdot \beta^{-1}, u(1) = 1 \cdot \beta^{-1}, \cdots, u(p-1) = (p-1) \cdot \beta^{-1};$$

$$u(p) = 1 \cdot \beta^{-2} + 0 \cdot \beta^{-1}, u(p+1) = 1 \cdot \beta^{-2} + 1 \cdot \beta^{-1}, \cdots, u(2p-1) = 1 \cdot \beta^{-2} + (p-1) \cdot \beta^{-1};$$

$$\cdots\cdots$$

并记为 $\{u(n)\}_{n=0}^{+\infty}$. 于是, 得到 $\{\chi_n \equiv \chi_{u(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$.

由 Pontryagin 对偶定理知, Γ_D 是一个离散群, 其中含可数多个元. 于是得到

$$\Gamma_D \leftrightarrow \{\chi_n \equiv \chi_{u(n)}\}_{n=0}^{+\infty}.$$

不再对此定理作详细证明 [84], 只要注意到以下的有用的积分:

$$\int_D \chi_{u(n)}(x)\overline{\chi}_{u(m)}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

这是因为

$$\int_D \chi_{u(n)}(x)\overline{\chi}_{u(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_D |\chi_{u(n)}(x)|^2\mathrm{d}x = \int_D 1 \cdot \mathrm{d}x = 1,$$

$$\int_D \chi_{u(n)}(x)\overline{\chi}_{u(m)}(x)\mathrm{d}x = \int_D \chi_{u(n)-u(m)}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

定义 3.4.2 (*D* 上的 Fourier 级数) 设 $\{\chi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是局部域 K_p 的紧群 D 上的标准完整直交系. 对于 $f \in L^1(D)$, 定义

Fourier 系数:

$$c_n = \int_D f(x)\overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x = \int_D f(x)\overline{\chi}_{u(n)}(x)\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.4.11}$$

Fourier 级数:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_n\chi_{u(n)}(x). \tag{3.4.12}$$

Dirichlet 核:

$$D_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), & n \geqslant 1, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \tag{3.4.13}$$

Fourier 级数的部分和:

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\chi_k(x).$$

此部分和有卷积表示：

$$S_n(f,x)=\int_D f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t=\int_D f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t. \tag{3.4.14}$$

与经典的 Fourier 级数情形类似，在紧群 D 上，研究 Dirichlet 核与相应的 Fourier 级数的收敛性.

定理 3.4.4　Dirichlet 核有如下性质：

(1) $\int_{|x|\leqslant 1} D_n(x)\mathrm{d}x=1,\ \forall n\geqslant 1$;

(2) $|D_n(x)|\leqslant n,\ \forall n\geqslant 0$;

(3) $D_n(x)=D_{mp^k+t}(x)=D_{p^k}(x)D_m(\beta^{-k}x)+\chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x),\ \forall n=mp^k+t$, 其中 $m\in\mathbb{P},k\in\mathbb{P},0\leqslant t<p^k$;

(4) $|D_n(x)|\leqslant \dfrac{p}{|x|},\ x\neq 0,\ x\in D$;

(5) $D_{p^k}(x)=\prod\limits_{\mu=0}^{k-1}D_p(\beta^{-\mu}x),\ k\geqslant 1$.

证　(1) 由特征的性质

$$\int_{|x|\leqslant 1}\chi_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1\end{cases}$$

得到.

(2) 由 $|D_n(x)|=\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_k(x)\right|\leqslant n$ 得到.

(3) $\forall m\in\mathbb{P},k\in\mathbb{P},0\leqslant t<p^k$, 有

$$\begin{aligned}D_{m\cdot p^k+t}(x)&=\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{p^k-1}\chi_{\mu\cdot p^k+\nu}(x)+\sum_{\nu=0}^{t-1}\chi_{m\cdot p^k+\nu}(x)\\&=\sum_{\mu=0}^{m-1}\chi_{\mu\cdot p^k}(x)\sum_{\nu=0}^{p^k-1}\chi_\nu(x)+\chi_{m\cdot p^k}(x)\sum_{\nu=0}^{t-1}\chi_\nu(x)\\&=D_m(\beta^{-k}x)D_{p^k}(x)+\chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x).\end{aligned}$$

(4) 对于任意 $x\in D$, 设 $|x|=p^{-k+1},\ k\geqslant 1$, 且 $n=m\cdot p^k+t,0\leqslant t<p^k$. 于是，对 $|x|=p^{-k+1}$, 记 $x=x_{k-1}\beta^{k-1}+x_k\beta^k+\cdots$, 其中 $x_j\in GF(p),\ j\geqslant k-1$. 相应地

$$\chi_n(x)=\chi_{u(n)}(x)=\chi(u(n)x),\quad 0\leqslant n<p^k.$$

从而

$$|x| = p^{-k+1} \Rightarrow D_{p^k}(x) = \sum_{j=0}^{p^k-1} \chi_j(x) = 0,$$

于是, (3) 的结果给出

$$D_{m\cdot p^k+t}(x) = D_{p^k}(x)D_m(\beta^{-k}x) + \chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x) = \chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x).$$

再由 (2), $|D_t(x)| \leqslant t$, 故

$$|D_n(x)| = |D_{m\cdot p^k+t}(x)| = |\chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x)| = |D_t(x)| \leqslant t < p^k = p \cdot p^{k-1} = \frac{p}{|x|}.$$

(5) 首先, 当 $k=1$ 时, $D_{p^1}(x) = \prod_{\mu=0}^{1-1} D_p(\beta^{-\mu}x)$ 为恒等式. 进而, 对于 $k>1$, 只需证: 对于所有 $k \geqslant 0$, 有

$$D_{p^{k+1}}(x) = D_p(\beta^{-k}x)D_{p^k}(x),$$

而此式由 (3),

$$D_{m\cdot p^k+t}(x) = D_{p^k}(x)D_m(\beta^{-k}x) + \chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x),$$

取 $m=p$, $t=0$, 得到

$$\begin{aligned} D_{p^{k+1}}(x) &= D_{p\cdot p^k+0}(x) = D_{p^k}(x)D_p(\beta^{-k}x) + \chi_p(\beta^{-k}x)D_0(x) \\ &= D_{p^k}(x)D_p(\beta^{-k}x) + 0 = D_p(\beta^{-k}x)D_{p^k}(x). \end{aligned}$$

定理得证.

定理 3.4.5 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 为 D 上的 Haar 可测函数, 则

(1) (Riemann-Legesgue 引理) 若 $f \in L^1(D)$, 且 c_n 由 (3.4.11) 确定, 则

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0.$$

(2) (唯一性定理) 若 $f \in L^1(D)$, 且 $c_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{P}$, 则 $f = 0$.

(3) (Fourier 级数部分和公式) 若 $f \in L^1(D)$, 则

$$S_n f(x) = \int_D f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t = D_n * f(x),$$

且

$$\lim_{n\to+\infty} S_{p^n} f(x) = f(x), \text{ a.e..} \tag{3.4.15}$$

进而, (3.4.15) 在 $f(x)$ 的连续点成立. 又若 $f(x)$ 是 D 上的连续函数, 则 (3.4.15) 在 D 上一致成立.

(4) (Parseval 公式) 若 $f \in L^2(D)$, 则 $\int_D |f|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$.

(5) 若 $f \in L^r(D)$, $1 \leqslant r < +\infty$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_{p^n} f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^r(D)} = 0. \tag{3.4.16}$$

这个定理的证明是常规的.

定理 3.4.6 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 为 D 上的 Haar 可测函数, 则

(1) (Dini 收敛定理) 若 $f \in L^1(D)$, 且

$$\int_D \frac{|f(x_0 - z) - f(x_0)|}{|z|} \mathrm{d}z < +\infty, \tag{3.4.17}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty} S_n f(x_0) = f(x_0).$$

(2) 若 $f \in L^1(D)$, 且 f 在 $x_0 + B^k$ 上为常数, 这里 k 是某个整数, 则

$$\lim_{n\to+\infty} S_n f(x_0) = f(x_0).$$

(3) 若 $f \in L^1(D)$, 且 f 是径向函数, 即对 $|x| = p^{-k}$, $k \geqslant 0$, 函数 $f(x) = \alpha_k$, 则对于 $x \neq 0$, 有

$$\lim_{n\to+\infty} S_n f(x) = f(x).$$

证 为证 (1), 任给 $\varepsilon > 0$, 由假设 (3.4.17), 存在 $k \geqslant 0$, 使得

$$\int_{B^k} \frac{|f(x_0 - z) - f(x_0)|}{|z|} \mathrm{d}z < \frac{\varepsilon}{2p}.$$

令

$$g_\varepsilon(z) = \{f(x_0 - z) - f(x_0)\}(1 - \Phi_{B^k}(z)).$$

由定理 3.4.4 性质 (4), 得

$$\begin{aligned} |S_n f(x_0) - f(x_0)| &= \left| \int_D \{f(x_0 - z) - f(x_0)\} D_n(z) \mathrm{d}z \right| \\ &\leqslant p \int_{B^k} \frac{|f(x_0-z)-f(x_0)|}{|z|} \mathrm{d}z + \left| \int_D g_\varepsilon(z) D_n(z) \mathrm{d}z \right|. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

由 $k \geqslant 0$ 的选择, 上式第一项 $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; 第二项中的 g_ε 的支集在 B^k 的补集中, 因此,

若记 $n = m \cdot p^k + t$, 利用定理 3.4.4 性质 (3), 得到

$$D_n(z) = \sum_{\mu=0}^{t-1} \chi_{m\cdot p^k+\mu}(z),$$

其中 $|z| > p^{-k}$, $0 \leqslant t < p^k$, 由此 (3.4.18) 式的第二项化为

$$\begin{aligned}\int_{K_p} g_\varepsilon(z) D_n(z)\mathrm{d}z &= \int_{K_p} g_\varepsilon(z) \sum_{\mu=0}^{t-1} \chi_{m\cdot p^k+\mu}(z)\mathrm{d}z = \sum_{\mu=0}^{t-1} \int_{K_p} g_\varepsilon(z)\chi_{m\cdot p^k+\mu}(z)\mathrm{d}z \\ &= \overline{\sum_{\mu=0}^{t-1} \int_{K_p} \overline{g}_\varepsilon(z)\overline{\chi}_{m\cdot p^k+\mu}(z)\mathrm{d}z} = \sum_{\mu=0}^{t-1} \overline{c}_{m\cdot p^k+\mu},\end{aligned}$$

这里 $c_{m\cdot p^k+\mu}$ 是 $g_\varepsilon(z)$ 的 Fourier 系数, 而和 $\sum\limits_{\mu=0}^{t-1} \overline{c}_{m\cdot p^k+\mu}$ 的项数最多是 $t(0 \leqslant t < p^k)$; 另一方面, Riemann-Lebesgue 引理给出

$$c_{mp^k+\mu} = o(1), \quad n = mp^k + \mu \to +\infty,$$

因此

$$\left|\int_{K_p} g_\varepsilon(z) D_n(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sum_{\mu=0}^{t-1} |c_{m\cdot p^k+\mu}| \to 0.$$

于是, 当 $n \to +\infty$ 时, 不等式 (3.4.18) 中最后两项都趋向于零, 故 (1) 成立.

定理中的 (2) 与 (3) 作为 (1) 的推论而得到. 定理得证.

与经典的 Fourier 系数求和法类似, 在紧群 D 上, 研究 Fejér 核与相应的 Fejér 算子.

设

$$c_k = \int_D f(x)\overline{\chi}_k(x)\mathrm{d}x = \int_D f(x)\overline{\chi}_{u(k)}(x)\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 系数, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\chi_k(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 令

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}, \tag{3.4.19}$$

称 $\{\sigma_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 为函数 $f(x)$ 的 $(c,1)$ 平均 (算术平均).

称

$$K_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x), & n \geqslant 1, \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{3.4.20}$$

为 Fejér 核. 不难推出

$$K_n(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\chi_k(x), & n\geqslant 1,\\ 0, & n=0.\end{cases}$$

Fejér 积分算子定义为

$$\sigma_n f(x)=\int_D f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t=\int_D f(t)K_n(x-t)\mathrm{d}t. \tag{3.4.21}$$

定理 3.4.7　Fejér 核有如下性质:

(1) $\displaystyle\int_D K_n(x)\mathrm{d}x=1$, $\forall n\geqslant 1$;

(2) $|K_n(x)|\leqslant \dfrac{n+1}{2}$, $\forall n\geqslant 1$;

(3) $|K_n(x)|\leqslant \dfrac{p}{|x|}$, $x\neq 0, x\in D$, $\forall n\geqslant 1$;

(4) 设 $n=mp^k+t, m\geqslant 0, k\geqslant 0, 0\leqslant t<p^k$, 则

$$\begin{aligned}nK_n(x)=&p^kD_{p^k}(x)mK_m(\beta^{-k}x)+tD_{p^k}(x)D_m(\beta^{-k}x)\\&+D_m(\beta^{-k}x)p^kK_{p^k}(x)+\chi_m(\beta^{-k}x)\cdot tK_t(x);\end{aligned}$$

(5) 设 $p^l\leqslant n<p^{l+1}$, $|x|=p^{-k+1}$, $1\leqslant k\leqslant l-1$, 则存在常数 $A>0$ 与 n, k 无关, 使得

$$\int_{|x|=p^{-k+1}}|K_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant Ap^{\frac{k-l}{2}};$$

(6) $\displaystyle\int_D |K_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant B$, B 与 n 无关;

(7) $\displaystyle\int_{p^{-k}\leqslant|x|\leqslant 1}|K_n(x)|\mathrm{d}x=o(1)$, $n\to+\infty$, $\forall k\geqslant 0$.

证　对于 (1), 由

$$\int_D K_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int D_k(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int 1\mathrm{d}x=1$$

得到.

对于 (2), 由 $|D_n(x)|\leqslant n$, 故

$$|K_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|D_k(x)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

(3) 由 $|D_n(x)| \leqslant \dfrac{p}{|x|}$ 得到 $|K_n(x)| \leqslant \dfrac{p}{|x|}$.

为证 (4), 利用定理 3.4.4(3). $\forall m \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{P}, 0 \leqslant t < p^k$,

$$D_{m\cdot p^k+t}(x) = D_{p^k}(x)D_m(\beta^{-k}x) + \chi_m(\beta^{-k}x)D_t(x),$$

则

$$nK_n(x) = \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=1}^{p^k} D_{\mu p^k+\nu}(x) + \sum_{\nu=1}^{t} D_{mp^k+\nu}(x),$$

展开并相加, 便得到 (4).

对于 (5), 由假设, $p^l \leqslant n < p^{l+1}$, $|x| = p^{-k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant l-1$, 因此

$$\begin{aligned}
&1 \leqslant k \leqslant l-1 \Rightarrow l > k \geqslant 1;\\
&p^l \leqslant n < p^{l+1} \Rightarrow p^{l-k} \leqslant np^{-k} < p^{l-k+1};\\
&n = mp^k + t, 0 \leqslant t < p^k \Rightarrow p^{l-k-1} < m < p^{l-k+1}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由 $|x| = p^{-k+1} > p^{-1}(k > 2 \Rightarrow -k < -2 \Rightarrow p^{-k+1} > p^{-2+1} = p^{-1})$, 故

$$D_{p^k}(x) = 0,$$

由 (4), 这蕴含

$$\begin{aligned}
nK_n(x) =& p^k D_{p^k}(x) mK_m(\beta^{-k}x) + tD_{p^k}(x)D_m(\beta^{-k}x)\\
&+ D_m(\beta^{-k}x)p^k K_{p^k}(x) + \chi_m(\beta^{-k}x)\cdot tK_t(x)\\
=& D_m(\beta^{-k}x)p^k K_{p^k}(x) + \chi_m(\beta^{-k}x)\cdot tK_t(x)\\
=& n\left\{\frac{1}{n}D_m(\beta^{-k}x)p^k K_{p^k}(x) + \frac{1}{n}\chi_m(\beta^{-k}x)\cdot tK_t(x)\right\}\\
\equiv& nI_1^n(x) + nI_2^n(x).
\end{aligned}$$

估计 $I_2^n(x)$: 由于 $|x| = p^{-k+1}$ 蕴含 $t^2 < (p^k)^2 = \dfrac{p^2}{|x|^2}$, 故

$$|I_2^n(x)| \leqslant \frac{t}{n}|K_t(x)| \leqslant \frac{t^2}{n} < \frac{p^2}{n|x|^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{|x|=p^{-k+1}} |I_2^n(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \frac{A}{n}\int_{|x|=p^{-k+1}} |x|^{-2}\mathrm{d}x = \frac{A}{n}p^{2k-1}\int_{|x|=p^{-k+1}} \mathrm{d}x\\
&= \frac{A}{n}p^{2k-1}p^{-k+1}(1-p^{-1}) < \frac{A}{n}p^k \leqslant Ap^{k-l},
\end{aligned}$$

其中常数 $A>0$ 与 n, k 无关;

类似地, 估计 $I_1^n(x)$, 由

$$|I_1^n(x)| \leqslant \frac{p^{2k}}{n}|D_m(\beta^{-k}x)|,$$

故

$$\begin{aligned}\int_{|x|=p^{-k+1}}|I_1^n(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \frac{p^{2k}}{n}\int_{|x|=p^{-k+1}}|D_m(\beta^{-k}x)|\mathrm{d}x = \frac{p^{2k}p^{-k}}{n}\int_{|x|=1}|D_m(\beta^{-1}x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{p^k}{n}\int_{|x|\leqslant 1}|D_m(\beta^{-1}x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{p^k}{n}\left\{\int_{|x|\leqslant 1}|D_m(\beta^{-1}x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \frac{p^k\sqrt{m}}{n} = \frac{mp^k}{n}m^{-\frac{1}{2}} \leqslant Ap^{\frac{k-l}{2}}.\end{aligned}$$

注意到 $l>k$, 并联合上述两个估计, 便得到 (5).

现在证 (6). 对于 n, 可以假设 $p^l \leqslant n < p^{l+1}$, 因此, $\forall x$, 有 $|K_n(x)| \leqslant n < p^{l+1}$, 故

$$\int_{|x|<p^{-l+1}}|K_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant p^{l+1}p^{-l+1} = p^2.$$

由性质 (5), 有

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant p^{-l+2}}|K_n(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{l-1}\int_{|x|=p^{-k+1}}|K_n(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant A\sum_{k=1}^{l-1}p^{\frac{k-l}{2}} = A\sum_{j=1}^{l-1}p^{\frac{-j}{2}} \leqslant A\left(1-p^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \leqslant A,\end{aligned}$$

取 $B=p^2+A$, (6) 得证.

最后证 (7). 当 $n\to+\infty$ 时, $p^l \leqslant n < p^{l+1}$ 蕴含 $l=l(n)\to+\infty$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{p^{-k}\leqslant|x|\leqslant 1}|K_n(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{k+1}\int_{|x|=p^{-j+1}}|K_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant A\sum_{j=1}^{k+1}p^{\frac{j-l}{2}}\\ &\leqslant Ap^{\frac{k-l}{2}} = o(1), \quad n\to+\infty,\end{aligned}$$

(7) 得证.

定理 3.4.8　关于 Fejér 积分 $\sigma_n f(x) = \int_D f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$, 有如下性质:

(1) 设 $f\in L^r(D), 1\leqslant r<+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\sigma_n f(\cdot)-f(\cdot)\|_{L^r(D)}=0$;

(2) 若 $f(x)$ 在 D 上连续, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n f(x)=f(x)$ 在 D 上一致成立;

(3) 若 $f(x)$ 在 D 上有界, 且 $f(x)$ 在 $x_0 \in D$ 连续, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n f(x_0) = f(x_0);$$

(4) 若 $f(x)$ 在 D 上为有界振荡函数, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n f(x) = f(x)$$

在 $f(x)$ 的所有连续点成立;

(5) 若 $f(x)$ 是 D 上的有界振荡连续函数, 则

$$\lim_{n\to+\infty} S_n f(x) = f(x)$$

在 D 上一致成立.

D 上有界振荡函数定义为: 设 $k \geqslant 0$, $\{S_\mu^k\}_{\mu=1}^{p^k}$ 是 B^k 在 D 中的陪集的全体, $\{S_\mu^k\}_{\mu=1}^{p^k} = D/B^k$. 称 D 上的函数 $f(x)$ 是*有界振荡的* (bounded fluctuation), 若

$$V^*f \equiv \sup_{k\geqslant 0} \sum_{\mu=1}^{p^k} \sup_{x,y\in S_\mu^k} |f(x)-f(y)| < +\infty;$$

函数 $f(x)$ 的*总变差* Vf 定义为

$$Vf \equiv \limsup_{k\geqslant 0} \sum_{\mu=1}^{p^k} \sup_{x,y\in S_\mu^k} |f(x)-f(y)| < +\infty.$$

证 由

$$\sigma_n f(x) - f(x) = \int_D \{f(x-t)-f(x)\} K_n(t)\mathrm{d}t.$$

于是, 据 Minkovski 不等式, 有

$$\|\sigma_n f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^r(D)} \leqslant \int_D \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_{L^r(D)} |K_n(t)| \,\mathrm{d}t.$$

由于

$$f\in L^r(D), 1\leqslant r<+\infty \Rightarrow \|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{L^r(D)} = o(1), \quad |t|\to 0,$$
$$f\in L^r(D), 1\leqslant r<+\infty \Rightarrow \|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{L^r(D)} \leqslant 2\|f\|_{L^r(D)},$$

任给 $\varepsilon>0$, 选择 $k=k(\varepsilon)>0$, 使得对于 $|t|<p^{-k}$ 时, 有

$$\|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{L^r(D)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2A},$$

其中 $A > 0$ 是定理 3.4.7(5) 中的常数. 于是

$$\begin{aligned}\|\sigma_n f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^r(D)} &\leqslant \frac{\varepsilon}{2A}\int_{|t|\leqslant p^{-k}}|K_n(t)|\mathrm{d}t + 2\|f\|_{L^r(D)}\int_{p^{-k}<|t|\leqslant 1}|K_n(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2A}\int_D |K_n(t)|\mathrm{d}t + 2\|f\|_{L^r(D)}\cdot o(1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + o(1),\end{aligned}$$

上式对于所选定的 k(但可以任意), 由定理 3.4.7(7) 知, 当 $n\to+\infty$ 时,

$$\lim_{n\to+\infty}\|\sigma_n f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^r(D)} = 0,$$

从而 (1) 成立.

当 $f(x)$ 在 D 上连续时, 由 D 的紧性, 知 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $k=k(\varepsilon)>0$, 使得当 $|t|<p^{-k}$ 时, $|f(x-t)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{A}$ 在 $x\in D$ 上一致成立, 于是

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| \leqslant \int_D |f(x-t)-f(x)||K_n(t)|\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{A}\int_D |K_n(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon,$$

从而 (2) 成立.

(3) 可以用类似证明 (2) 的方法得到.

为证 (4), 利用关于有界振荡函数的两个重要事实:

① $f(x)$ 是 D 上的有界振荡函数, 则 $f(x)$ 在 $D\backslash E$ 上连续, 这里 E 是 D 中的零测度集 $\mu E = 0$※.

② $f(x)$ 是 D 上的有界振荡函数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足

$$|nc_n| \leqslant pV^*f, \quad n\geqslant 1,$$
$$\limsup_n |nc_n| \leqslant pV^*f.$$

※ 事实上, 令

$$\mathrm{OSC}f(x) = \lim_{k\geqslant 0}\sup_{y\in B^k}\sup|f(x+y)-f(x)|,$$

则

$$f(x)\text{在点}x\in D\text{连续} \Leftrightarrow \mathrm{OSC}f(x)=0.$$

于是, 设

$$E_0 = \{x\in D : \mathrm{OCS}f(x) > 1\},$$
$$E_k = \left\{x\in D : 2^{-k} < \mathrm{OCS}f(x) < 2^{-k+1}\right\}, \quad k=1,2,\cdots.$$

不难看出, 每个 $E_k, k=0,1,2,\cdots$ 都是有限集 (例如 $\forall F\subset E_0$, $\sum\limits_{x\in F}\mathrm{OCS}f(x)\leqslant V^*f$, 因此, card $F < V^*f$, 所以 E_0 是有限集), 这样, $f(x)$ 的不连续点集 $E=\bigcup\limits_{k\geqslant 0}E_k$ 是可数集.

特别地,

$$c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)^{※}.$$

于是, 利用 $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 由 (3) 得到 (4).

最后, 为证 (5), 也只需注意到 Fourier 级数求和法的两个基本事实:

③ 若 $S_n f \to S\ f$, 则 $\sigma_n f \to \sigma\ f$;

④ 若 $\sigma_n f \to \sigma\ f$, 且 $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 则 $S_n f \to \sigma\ f$.

由 (5) 的假设, $f(x)$ 是 D 上的有界振荡函数, 故 $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. 又由 $f(x)$ 是 D 上的连续函数, (4) 给出 $\sigma_n f \to \sigma\ f$ 在 D 上成立, 从而 (5) 得证.

下面研究紧群 D 上的逼近等价性定理.

众所周知, 函数的 Fourier 级数、Fourier 系数与函数的属性有密切关系, 例如

$$f(x) \text{ 是 } D \text{ 上的有界振荡函数} \Rightarrow c_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$f \in L^1(D) \Rightarrow c_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

而这种性质可以用更一般的概念来描述, 即函数的连续模、Lip 类、最佳逼近等.

局部域的紧群 D 上的连续模、Lip 类、最佳逼近的定义如下:

定义 3.4.3 (D 上的连续模, Lip 类, 最佳逼近) 设

$$f \in X(D) = \begin{cases} C(D), \\ L^r(D), \quad 1 \leqslant r < +\infty, \end{cases}$$

※ 事实上, 设 $n > 0$, $|u(n)| = p^k, k \geqslant 1$, 并且 $p^{k-1} \leqslant n < p^k$. 于是, 取一个元素序列 $\left\{a_j^k\right\}$, 使得在集合 $S_j^k = a_j^k + B^k$ 上满足

$$\int_{S_j^{k-1}} \overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

于是

$$c_n = \int_D f(x)\overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{p^{k-1}} \int_{S_j^{k-1}} f(x)\overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{p^{k-1}} \int_{S_j^{k-1}} \left\{f(x) - f(a_j^{k-1})\right\} \overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$|c_n| \leqslant \sum_{j=1}^{p^{k-1}} \sup_{x,y\in S_j^{k-1}} |f(x) - f(a_j^{k-1})| \cdot p^{-k+1} \leqslant p\frac{1}{n}V^* f.$$

对于 $\delta > 0$, 称

$$\omega(X(D), f, \delta) = \sup_{h\in D, |h|\leqslant\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X(D)}$$

为 $f(x)$ 在空间 $X(D)$ 中的连续模; 对于 $\alpha > 0$, 称

$$\mathrm{Lip}(X(D), \alpha) = \left\{f \in X(D) : \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X(D)} = O(|h|^{\alpha}), h \in D\right\}$$

为空间 $X(D)$ 中的 Lipschitz α 类, 简称 Lip 类.

记

$$\mathbb{P}_n = \{p_k(x) : 0 \leqslant k \leqslant n, x \in D\},$$

其中 $p_k(x)$ 是次数为 $k \leqslant n$ 的特征多项式

$$p_k(x) = a_k\chi_k(x) + a_{k-1}\chi_{k-1}(x) + \cdots + a_1\chi_1(x) + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C} \text{ 为系数}.$$

称

$$E_n(X(D), f) = \inf_{p_n\in\mathbb{P}_n} \|f - p_n\|_{X(D)}$$

为 $f(x)$ 用 n 次特征多项式在空间 $X(D)$ 中的最佳逼近.

这些概念都是经典函数逼近论中熟知概念在局部域中的移植, 是抽象调和分析中最基本的. 这里列举它们的性质, 并仅对个别条目加证明, 其余留作练习.

① 连续模 $\omega(X(D), f, \delta)$ 的基本性质:

(a) $\omega(X(D), f, \delta)$ 是 $\delta \geqslant 0$ 的单调增函数;

(b) $\omega(X(D), f, \lambda\delta) \leqslant (1+\lambda)\omega(X(D), f, \delta)$, $\forall\lambda > 0$;

(c) $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega(X(D), f, \delta) = 0$;

(d) $\omega(X(D), f, \delta) = o(\delta), \delta \to +0$ 蕴含 $f = c$, a.e.;

(e) $f \in L^r(D)$, $1 \leqslant r < +\infty$ 蕴含 $\omega(L^r(D), f, p^{-k}) = o(1), k \to +\infty$; $f \in C(D)$ 蕴含 $\omega(L^{\infty}(D), f, p^{-k}) = o(1)$, $k \to +\infty$;

(f) $f \in L^1(D)$ 蕴含 $|c_n| \leqslant \omega(L^1(D), f, p\,|u(n)|^{-1})$, $n \to +\infty$.

下面仅证明 (f). 取 $n > 0$, 则存在 $h \in D$, 满足 $|hu(n)| = p$, 使得

$$|\chi_n(h) - 1| \geqslant 1,$$

并且使得

$$\chi_n(h)c_n = \int_D f(x+h)\overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$(\chi_n(h) - 1)c_n = \int_D \{f(x+h) - f(x)\}\,\overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\begin{aligned}|c_n| &\leqslant \frac{1}{|\chi_n(h)-1|}\int_D |\{f(x+h)-f(x)\}|\,|\overline{\chi}_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{|\chi_n(h)-1|}\int_D |\{f(x+h)-f(x)\}|\,\mathrm{d}x \leqslant \omega(L^1(D),f,|h|) \\ &= \omega\left(L^1(D),f,p|u(n)|^{-1}\right).\end{aligned}$$

② Lipschitz 类 $\mathrm{Lip}(X(D),\alpha)$ 的基本性质:

(a) $f\in \mathrm{Lip}(X(D),\alpha)$ 蕴含 $\exists M>0$, 使得 $\omega(X(D),f,\delta)\leqslant M\delta^\alpha$;

(b) $f\in \mathrm{Lip}(X(D),\alpha)$, $g\in L^1(D)$ 蕴含 $f*g\in \mathrm{Lip}(X(D),\alpha)$;

(c) $f\in \mathrm{Lip}(X(D),\alpha)$ 蕴含 $c_n=O(n^{-\alpha})$, $n\to+\infty$; $f\in \mathrm{Lip}(X(D),\alpha),\alpha>\dfrac{1}{2}$ 蕴含 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|<+\infty$.

证 只证 (c). 其中第一个结果由 (a) 可得. 第二个结果由

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|c_j| = |c_0| + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{|u(n)|=p^k}|c_n| \leqslant |c_0| + \sum_{j=1}^{+\infty}p^{\frac{k}{2}}\left\{\sum_{|u(n)|=p^k}|c_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

固定 k, $k\geqslant 1$, 并取 $h\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\omega^2(L^2(D),f,|h|) &\geqslant \int_D |f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{+\infty}|\chi_j(h)-1|^2|c_j|^2 \\ &\geqslant \sum_{|u(n)|=p^k}|\chi_n(h)-1|^2|c_n|^2. \qquad (3.4.22)\end{aligned}$$

现在, 假设 $|u(n)|=p^k$, 则存在 $h\in D$, $|h|=p^{-k+1}$, 使得

$$|\chi_n(h)-1|>1,$$

这是因为 B^k 在 $B^{k-1}\backslash B^k$ 中的 $(p-1)$ 陪集上, $\chi_n(h)$ 的值中至少有一个值具有负实部. 在 $(p-1)$ 个陪集上对 (3.4.22) 求和, 得到

$$(p-1)\omega^2(L^2(D),f,p^{-k+1}) \geqslant \sum_{|u(n)|=p^k}^{+\infty}|c_n|^2.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|c_n| \leqslant |c_0| + A\sum_{k=1}^{+\infty}p^{\frac{k}{2}}\omega(L^2(D),f,p^{-k+1}). \qquad (3.4.23)$$

现在假设 $f \in \mathrm{Lip}(X(D), \alpha)$, $\alpha > \dfrac{1}{2}$, 则

$$\omega(L^2(D), f, p^{-k+1}) \leqslant \omega(L^\infty(D), f, p^{-k+1}) = O(p^{-k\alpha}).$$

最后, 代入 (3.4.23) 得

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |c_j| \leqslant |c_0| + A\sum_{k=1}^{+\infty} p^{\frac{k}{2}} p^{-k\alpha} = |c_0| + A\sum_{k=1}^{+\infty} p^{k(\frac{1}{2}-\alpha)} < +\infty.$$

定理 3.4.9 局部域 K_p 的紧群 $D \subset K_p$ 上, 下述论断彼此等价: 对于 $s \geqslant 0$,

(1) $f^{\langle s\rangle} \in \mathrm{Lip}(X(D), \alpha)$, $\alpha > 0$;

(2) $\omega(X(D), f^{\langle s\rangle}, p^{-n}) = O(p^{-n\alpha})$, $n \to +\infty$;

(3) $E_{p^n}(X(D), f) = O(p^{-n(\alpha+s)})$, $n \to +\infty$;

(4) $\|f(\cdot) - S_{p^n}(, f, \cdot)\|_{X(D)} = O(p^{-n(\alpha+s)})$, $n \to +\infty$,

其中 Lip, ω, E_{p^n} 与 S_{p^n} 分别为 $X(D) = \begin{cases} C(D), \\ L^r(D), \quad 1 \leqslant r < +\infty \end{cases}$ 上的 Lip 类、连续模、最佳逼近与 Fourier 级数的 p^n 部分和. 这个等价性定理的特殊情形, $p = 2$ 的结果已经在 3.3.3 节列出.

中国学者在局部域上的逼近、局部域上的调和分析方面做了出色的工作, 2007 年塞尔维亚 Niš(尼什) 的国际会议上的报告 [82] 中列出了 40 年来中国学者的工作.

对于紧群 D 上的逼近恒同核与逼近算子, Walsh 系的逼近恒同算子, 有如下结果.

① Abel-Poisson 型核.

$$\lambda_r(x) = \frac{1}{1-r}\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - r^{p^{k-1}}}{1 - \omega^{x_k} r^{p^{k-1}}},$$

其中 $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p}}$.

关于这个核, 有如下逼近性质 [61]:

定理 3.4.10 对于 $\alpha > 0$ 与 $s \in \mathbb{P}$, 若 $D^{\langle s\rangle} f \in \mathrm{Lip}(X(D), \alpha)$, 则当 $r \to 1$ 时, 有

$$\|\lambda_r * f(\cdot) - f(\cdot)\|_{X(D)} = \begin{cases} O\left((1-r)^{s+\alpha}\right), & 0 < \alpha < 1, \\ O\left((1-r)^s \ln \dfrac{1}{1-r}\right), & \alpha = 1, \\ O\left((1-r)^s\right), & \alpha > 1. \end{cases}$$

反之, 若 $f \in X(D)$ 满足 $\|\lambda_r * f(\cdot) - f(\cdot)\|_{X(D)} = O((1-r)^{s+\alpha})$, $r \to 1$, 则 $D^{\langle s\rangle} f \in \mathrm{Lip}(X(D), \alpha)$.

② de la Vellée-Poussin 型核.

$$V_n(x) = \frac{1}{c_n}\left\{\frac{1}{2}\chi_n^{\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2}\overline{\chi}_n^{\frac{1}{2}}(x)\right\}^{\varphi(k)}, \quad x \in D,$$

其中 $\varphi(k) = 2p^{bk}$, $b > 0$, χ_n 是 D 上的特征.

此算子成立相应的逼近定理 [27].

③ 典型平均核.

$$K_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^{\lambda}\right)\overline{w}_k(x), \quad \lambda > 0,\ x \in D,$$

其中 $w_k(x)$ 是 Walsh 函数系中的元.

这个算子也成立相应的逼近定理 [107],[108].

2. *局部域 K_p 的加群 (局部紧群) K_p^+ 上的函数逼近*

现在讨论加群 K_p^+ 上的函数逼近问题.

定义 3.4.4 (K_p 上的连续模, Lip 类, 最佳逼近) 记 $X(K_p)$ 为局部域 K_p 上的复值 Haar 可测函数 $f: K_p \to \mathbb{C}$ 所成的连续函数类 $C(K_p)$, 或 r 幂 Haar 可积函数类 $L^r(K_p)$, $1 \leqslant r < +\infty$, 即

$$X(K_p) = \begin{cases} C(K_p), \\ L^r(K_p), \quad 1 \leqslant r < +\infty. \end{cases}$$

对于 $f \in X(K_p)$, 以及 $\delta > 0$, 称

$$\omega(X(K_p), f, \delta) = \sup_{h \in K_p, |h| \leqslant \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X(K_p)} \tag{3.4.24}$$

为 $f(x)$ 在空间 $X(K_p)$ 中的连续模.

空间 $X(K_p)$ 中的 Lipschitz 函数类定义为：对于 $\alpha > 0$,

$$\mathrm{Lip}(X(K_p), \alpha) = \left\{f \in X(K_p) : \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X(K_p)} = 0(|h|^{\alpha}), h \in K_p\right\}. \tag{3.4.25}$$

对于局部域 K_p 上的检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$, $\forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 存在指标对 $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$(定理 3.1.7), 记所有指标对为确定的 $n \in \mathbb{Z}$ 的检验函数集合为

$$\mathbb{S}_n(K_p) = \{\varphi \in \mathbb{S}(K_p) : \mathrm{index}\ \varphi = (n, l), l \in \mathbb{Z}\}.$$

定义 $f(x)$ 用检验函数类在空间 $X(K_p)$ 中的最佳逼近为

$$E_n(X(K_p), f) = \inf_{\varphi \in \mathbb{S}_n(K_p)} \|f - \varphi\|_{X(K_p)}. \tag{3.4.26}$$

关于空间 $X(K_p)$ 中的连续模与最佳逼近, 具有与欧氏空间 $\mathbb{R}$ 相应空间 $X(\mathbb{R})$ 中的连续模、最佳逼近有类似的性质 [9].

定理 3.4.11　局部域 K_p 上, 下述论断彼此等价: 对于 $s \geqslant 0$,

(1) $f^{\langle s\rangle} \in \mathrm{Lip}(X(K_p),\alpha)$, $\alpha > 0$;

(2) $\omega(X(K_p), f^{\langle s\rangle}, p^{-n}) = O(p^{-n\alpha})$, $n \to +\infty$;

(3) $E_{p_n}(X(K_p), f) = O(p^{-n(\alpha+s)})$, $n \to +\infty$.

这个定理已经在 3.3.3 节列出.

在给出局部紧群 K_p^+ 上的逼近恒同核与逼近算子之前, 先回顾 $\mathbb{R}^1$ 的情形.

(i) 一维欧氏空间 $\mathbb{R}^1$ 上的逼近恒同核与逼近算子.

逼近恒同核:　称核 $\{\kappa(x,\rho)\}_{\rho\in J\subset\mathbb{R}}$ 为逼近恒同核, 若 $\exists M > 0$, 使得

$$\|\kappa(x,\rho)\|_1 \leqslant M, \quad \forall \rho \in J,$$

且

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{|u|\leqslant\delta}|\kappa(u,\rho)|\mathrm{d}u = 0, \quad \delta > 0.$$

称相应的积分

$$I(f,x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\kappa(x,\rho)\mathrm{d}u$$

为由核 $\{\kappa(x,\rho)\}_{\rho\in J\subset\mathbb{R}}$ 生成的逼近恒同算子, 或称奇异积分算子, 是一种卷积型算子. 通常取作

$$I(f,x,\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\kappa(\rho u)\mathrm{d}u.$$

具体例子如下:

(A) Gauss-Weierstrass 核、积分算子.

令 $W(x) = 2^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/4}$, 取 $\rho = t^{-1/2}$, $t \to 0^+$,

$$W(f,x,t) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)W(\rho u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\mathrm{e}^{-u^2/4t}\mathrm{d}u.$$

有如下性质: 记 $X \equiv X(\mathbb{R})$, 则

① $\|W(f,\cdot,t)\|_X \leqslant \|f\|_X$, $t > 0$;

② $\lim\limits_{t\to0^+} W(f,x,t) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$ 对 $f \in L^r(\mathbb{R}), 1 \leqslant r \leqslant \infty$;

③ $\|W(f,\cdot,t) - f(\cdot)\|_X = O(\omega^*(X,f,t^{1/2}))$, $t \to 0^+$;

④ $0 < \alpha \leqslant 2$, 则 $f \in \mathrm{Lip}^*\alpha \Leftrightarrow \|W(f,\cdot,t) - f(\cdot)\|_X = O(t^{\alpha/2})$, $t \to 0^+$;

⑤ $\alpha = 2$, 则 $f \in \mathrm{Lip}^*2 \Rightarrow \|W(f,\cdot,t) - f(\cdot)\|_X = O(t)$, $t \to 0^+$.

这里 $\omega^*(X,f,t^{1/2})$ 与 $\mathrm{Lip}^*\alpha$ 分别是二阶连续模与二阶 Lip 类.

(B) Fejér 核、积分算子.

令 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]^2$, 取 $\rho\to+\infty$,

$$\sigma(f,x,t)=\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)F(\rho u)\mathrm{d}u.$$

有

① $\|\sigma(f,\cdot,t)\|_X\leqslant\|f\|_X$, $t>0$;

② $\lim\limits_{t\to0^+}\sigma(f,x,t)=f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}$, $\forall f\in L^r(\mathbb{R}),1\leqslant r\leqslant\infty$;

③ $\|\sigma(f,\cdot,\rho)-f(\cdot)\|_X=O(\omega^*(X,f,\rho^{-1}))$, $\rho\to+\infty$;

④ $0<\alpha<1$, 则 $f\in\mathrm{Lip}\alpha\Leftrightarrow\|\sigma(f,\cdot,\rho)-f(\cdot)\|_X=O(\rho^{-\alpha})$, $\rho\to+\infty$;

⑤ $\alpha=1$, 则 $f\in\mathrm{Lip}^*1\Rightarrow\|\sigma(f,\cdot,\rho)-f(\cdot)\|_X=O(\rho^{-1})$, $\rho\to+\infty$.

(C) Cauchy-Poisson 核、积分算子.

令 $p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$, 取 $\rho=y^{-1}$, $y\to0^+$,

$$P(f,x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-u)}{y^2+u^2}\mathrm{d}u.$$

有

① $\|P(f,\cdot,y)\|_X\leqslant\|f\|_X$, $y>0$;

② $\lim\limits_{y\to0^+}P(f,x,y)=f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}$ 对 $f\in L^r(\mathbb{R})$, $1\leqslant r\leqslant\infty$;

③ $\|P(f,\cdot,y)-f(\cdot)\|_X=O(\omega^*(X,f,y))$, $y\to0^+$;

④ $0<\alpha<1$, 则 $f\in\mathrm{Lip}\alpha\Leftrightarrow\|P(f,\cdot,y)-f(\cdot)\|_X=O(y^\alpha)$, $y\to0^+$;

⑤ $\alpha=1$, 则 $f\in\mathrm{Lip}^*1\Rightarrow\|P(f,\cdot,y)-f(\cdot)\|_X=O(y)$, $y\to0^+$.

还有一些核与积分算子, 列举在本节末尾的附注中.

(ii) 局部域 K_p 上的逼近恒同核与逼近算子.

变换"底空间"$\mathbb{R}$ 到局部域 K_p, 其非阿基米德赋值为 $|x|,x\in K_p$.

(A) Poisson 型核.

$$R_y(x)=p^{-s}|y|^{-1}\Phi_s(xy^{-1})\left\{1+\sum_{k=1}^{m}c_k\chi_{xy^{-1}}(\alpha_k\beta^{-s-1})\right\},\quad x\in K_p,$$

其中 $y\in K_p$ 为参数, $s\in\mathbb{Z}$, $\alpha_k\in K_p$, $c_k\in\mathbb{C}$, $k=1,2,\cdots,m$, $m\in\{1,2,\cdots,p-1\}$.

关于这个核, 有如下逼近性质 [67]:

定理 3.4.12 在局部域的加群 K_p^+ 上成立:

(1) 对于任意实数 $m \geqslant 0$, 有 $D^{\langle m\rangle}R_y(x) = R_y^{\langle m\rangle}(x) \in L^1(K_p)$, 且

$$\left\|R_y^{\langle m\rangle}\right\|_{L^1(K_p)} = O(|y|^{-m}), \quad |y| \to 0;$$

(2) 设 $1 \leqslant r < +\infty$, 对于任意实数 $m \geqslant 0$ 与 $\alpha > 0$, 则

$$D^{\langle m\rangle}f \in \mathrm{Lip}(L^r(K_p),\alpha) \text{ 蕴含 } \|R_y * f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^r(K_p)} = O(|y|^{m+\alpha}), |y| \to 0;$$

(3) 设 $1 \leqslant r < +\infty$, 对于任意实数 $m \geqslant 0$ 与 $\alpha > 0$, 若对于 $f \in L^r(K_p)$,

$$\|R_y * f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^r(K_p)} = O(|y|^{m+\alpha}),\ |y| \to 0,$$

则 $D^{\langle m\rangle}f \in L^r(K_p)$, 并且成立

$$\omega(L^r(K_p), D^{\langle m\rangle}f, \delta) = \begin{cases} O(\delta^\alpha), & 0 < \alpha < 1, \\ O(\delta|\ln\delta|), & \alpha = 1. \end{cases}$$

(B) de la Vallée-Poussin 型核.

$$V_y(x) = \frac{1}{c_n}\Phi_0(yx)\left\{\frac{1}{2}\chi_{y^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2}\overline{\chi}_{y^{-1}}^{\frac{-1}{2}}(x)\right\}^{\varphi(y)}, \quad x, y \in K_p,$$

其中 $\varphi(y) = 2|y|^{-b}$, $b > 4$. 此核也有任意阶的按点 p 型导数, 并成立逼近定理 [27].

(C) 径向逼近恒同核.

若 $\omega_0 \in L^1(\Gamma_p)$ 满足:

① $\omega_0 \in L^1(\Gamma_p)$ 是径向的, 即 $\omega_0(\xi) = \omega_0(|\xi|)$, $\xi \in \Gamma_p$;

② 存在 $w \in L^1(K_p)$, 使得 $w^\wedge(\xi) = \omega_0(\xi)$;

③ 存在实数 $\alpha > 0$, 使得 $\lim\limits_{|\xi|\to 0}\dfrac{\omega_0(\xi)-1}{|\xi|^\alpha} = c \neq 0$;

④ $\dfrac{\omega_0(\xi)-1}{|\xi|^\alpha} = \mu^\wedge(\xi)$, $\alpha > 0$, 其中 $\mu \in L^1(K_p)$, 且 $\|\mu\|_{L^1(K_p)} = 1$;

则称 ω_0 为**径向逼近恒同核**.

关于这个核, 成立逼近的正逆定理 [111]~[113].

注 在欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上, 有许多逼近恒同核与相应的逼近恒同算子 [9], 为了比较方便起见, 下面列出欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上的逼近算子, 供读者参考.

在 $C(\mathbb{R})$ 或 $L^1(\mathbb{R})$ 上, 有

Fejér 核

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2,$$

Fejér 卷积积分算子

$$\sigma(f,x,\rho)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x-u)\rho F(\rho u)\mathrm{d}u,\quad \rho\to+\infty.$$

Gauss-Weierstrass 核

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{4}},$$

Gauss-Weierstrass 卷积积分算子

$$W(f,x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}f(x-u)\mathrm{e}^{\frac{-u^2}{4t}}\mathrm{d}u,\quad t\to 0.$$

Cauchy-Poisson 核

$$p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2},$$

Cauchy-Poisson 卷积积分算子

$$P(f,x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}f(x-u)\frac{1}{y^2+u^2}\mathrm{d}u,\quad y\to 0.$$

Jackson - de la Vallée-Poussin 核

$$n(x)=\frac{3}{\sqrt{8\pi}}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4,$$

Jackson – de la Vallée-Poussin 卷积积分算子

$$N(f,x,\rho)=\frac{12}{\pi\rho^3}\int_{\mathbb{R}}f(x-u)\frac{\sin^4\frac{\rho u}{2}}{u^4}\mathrm{d}u,\quad \rho\to+\infty.$$

Picard 核

$$c(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-|x|},$$

Picard 卷积积分算子

$$C(f,x,\rho)=\frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}}f(x-u)\mathrm{e}^{-\rho|u|}\mathrm{d}u,\quad \rho\to+\infty.$$

在 $C([0,2\pi])$ 或 $L^1([0,2\pi])$ 上, 有

Dirichlet 核

$$D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2n\pi,\\ 2n+1, & x\neq 2n\pi,\end{cases}$$

Dirichlet 卷积积分算子

$$S_n(f,x) = f * D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}u.$$

Fejér 核

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2, & x \neq 2n\pi, \\ n+1, & x = 2n\pi, \end{cases}$$

Fejér 卷积积分算子

$$\sigma_n(f,x) = f * F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)\mathrm{d}u.$$

Abel-Poisson 核

$$p_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos kx = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2},$$

Abel-Poisson 卷积积分算子

$$P_r(f,x) = f * p_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)p_r(u)\mathrm{d}u.$$

Rogosinski 核

$$b_n(x) = \frac{1}{2} + \left[D_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + D_n\left(x - \frac{\pi}{2n-1}\right)\right],$$

Rogosinski 卷积积分算子

$$B_n(f,x) = f * b_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)b_n(u)\mathrm{d}u.$$

Jackson 核

$$j_n(x) = \frac{3}{n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2,$$

Jackson 卷积积分算子

$$J_n(f,x) = f * j_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)j_n(u)\mathrm{d}u.$$

Weierstrass 核

$$w_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tk^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

Weierstrass 卷积积分算子

$$W_t(f,x) = f * w_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)w_t(u)\mathrm{d}u.$$

de la Vallée-Poussin 核

$$v_n(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

de la Vallée-Poussin 卷积积分算子

$$V_n(f,x) = f * v_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)v_n(u)\mathrm{d}u.$$

......

关于这些逼近恒同算子, Jackson 定理与 Bernstein 定理、正逆逼近定理都成立, 并且有一定的逼近阶, 为 $X([0,2\pi])$, $X(\mathbb{R})$ 上的逼近理论打下坚实的基础, 形成了欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上 (以及 $\mathbb{R}^n$ 上) 丰富多彩的函数逼近论 (也称为"函数构造论") 领域.

局部域分析的结果虽然与欧氏空间上的结果有类似之处, 但也有许多不同, 而且证明方法相当精致. 与欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上的函数逼近论相比较, 局部域 K_p 上的函数逼近论非常年轻, 还有大量的新课题与开问题, 等待数学家们去开发和研究.

思 考 题

1. 总结欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上与局部域 K_p 上各种逼近恒同核与逼近恒同算子的性质, 并作出比较.
2. 还能构造局部域 K_p 上哪些新的逼近恒同核与逼近恒同算子? 有何性质?
3. 局部域乘群 K_p^* 上的函数构造框架如何? 给出你的设想.

第 4 章　局部域 K_p 上的函数空间

4.1　局部域 K_p 上的 B 型空间、F 型空间

局部域 K_p 上常用的函数空间, 如连续函数空间 $C \equiv C(K_p)$、无穷远处趋于零的连续函数空间 $C_0 \equiv C_0(K_p)$、r 幂 Haar 可积函数空间 $L^r \equiv L^r(K_p)\,(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$、检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$、分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 等, 已在第 3 章中给出. 现在介绍局部域上的 B 型空间、F 型空间, 以及 Hölder 型空间、Lebesgue 型空间、Sobolev 型空间, 参见文献 [38], [55], [57], [68], [80], [89], [128], [129].

4.1.1　B 型空间、F 型空间

设 $f: K_p \to \mathbb{C}$ 为 K_p 上 Haar 可测的复值函数.

定义 4.1.1 (两类范数)　设 $\mathbb{S}(K_p)$ 与 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 分别为局部域 K_p 上的检验函数空间与相应的分布空间, $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 与 $\mathbb{S}^*(\Gamma_p)$ 分别为特征群 Γ_p 上的检验数空间与相应的分布空间. 前面几章已经提到, 局部域加群与其特征群同构, $K_p \leftrightarrow \Gamma_p$, 将 $\mathbb{S}(K_p)$ 与 $\mathbb{S}(\Gamma_p)$ 视为等同, $\mathbb{S}^*(K_p)$ 与 $\mathbb{S}^*(\Gamma_p)$ 视为等同, 具体应用时根据情况而确定.

取函数序列 $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{S}(K_p)$, 满足:

(i) $\mathrm{supp}\varphi_j \subset K_p$ 为紧集, $j \in \mathbb{P}$;

(ii) ① $\mathrm{supp}\varphi_0 \subset \{x \in K_p : |x| < p\}$;

$$\mathrm{supp}\varphi_j \subset \left\{x \in K_p : p^{j-1} < |x| < p^{j+1}\right\},\ j \in \mathbb{N},$$

② $|\varphi_j^{\langle s\rangle}(x)| \leqslant c_s p^{-j+js},\ s \in (0,+\infty),\ j \in \mathbb{P}, x \in K_p,$

其中 $\varphi_j^{\langle s\rangle}(x)$ 是 $\varphi_j(x)$ 的 s 阶按点 p 型导数;

(iii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j(x) = 1,\ x \in K_p.$

用记号

$$\mathbb{A}(K_p) = \left\{\varphi \equiv \{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{P}} \subset \mathbb{S}(K_p) : \varphi_j \text{ 满足 (i)} \sim \text{(iii)}\right\} \tag{4.1.1}$$

表示这个函数类.

同样, 可以定义

$$\mathbb{A}(\Gamma_p) = \left\{\psi \equiv \{\psi_j\}_{j\in\mathbb{P}} \subset \mathbb{S}(\Gamma_p) : \psi_j \text{ 满足 (i)}' \sim \text{(iii)}'\right\}, \tag{4.1.2}$$

其中 (i)′ ~(iii)′ 是: 对于 $\psi=\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}\subset\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 有

(i)′ $\operatorname{supp}\psi_j\subset\Gamma_p$ 为紧集, $j\in\mathbb{P}$;

(ii)′ ① $\operatorname{supp}\psi_0\subset\{\xi\in\Gamma_p:|\xi|<p\}$;

$\operatorname{supp}\psi_j\subset\left\{\xi\in\Gamma_p:p^{j-1}<|\xi|<p^{j+1}\right\},\quad j\in\mathbb{N}$,

② $\left|T_{\langle s\rangle}\psi_j^{\vee}(x)\right|\leqslant c_sp^{-j+js},\ s\in(0,+\infty),\ j\in\mathbb{P},\ x\in K_p$,

其中 $T_{\langle s\rangle}\psi_j^{\vee}(x)$ 是 $\psi_j^{\vee}(x)$ 的 s 阶按点 p 型导数;

(iii)′ $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\psi_j(\xi)=1,\ \xi\in\Gamma_p$.

对于定义在 K_p 上的函数序列 $\{a_j(x)\}_{j=0}^{+\infty}\subset\mathbb{S}(K_p)$, 定义两种"范数":

$$\|a_j\|_{l_t(L^r(K_p))}=\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}\left[\|a_j(\cdot)\|_{L^r(K_p)}\right]^t\right\}^{\frac{1}{t}}=\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}\left[\int_{K_p}|a_j(x)|^r\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{t}{r}}\right\}^{\frac{1}{t}},\quad(4.1.3)$$

$$\|a_j\|_{L^r(l_t(K_p))}=\left\|\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}|a_j(\cdot)|^t\right\}^{\frac{1}{t}}\right\|_{L^r(K_p)}=\left(\int_{K_p}\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}|a_j(x)|^t\right\}^{\frac{r}{t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}},\quad(4.1.4)$$

其中 $0<r,t\leqslant+\infty$, 当 $r,t=+\infty$ 时, 作通常意义下的修改 (取本性上确界).

同样, 对于 $\{a_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}\subset\mathbb{S}(\Gamma_p)$, 可定义 $\|a_j\|_{l_t(L^r(\Gamma_p))}$, $\|a_j\|_{L^r(l_t(\Gamma_p))}$.

可以证明[85], 当 $0<r,t\leqslant+\infty$ 时, 它们是"拟范数", 而 $1\leqslant r,t\leqslant+\infty$ 时则是范数.

另一方面, 在局部域 K_p 上, 有非齐次单位分解

$$1=\Phi_{B^0}(x)+\sum_{j=1}^{+\infty}\Phi_{B^{-j}\setminus B^{-j+1}}(x),\quad x\in K_p,\quad(4.1.5)$$

这里 Φ_A 是集合 A 的示性函数, $\Phi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A\end{cases}$ 也有齐次单位分解

$$1=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Phi_{B^{-j}\setminus B^{-j+1}}(x),\quad x\in K_p.\quad(4.1.6)$$

在局部域 K_p 的特征群 Γ_p 上有非齐次单位分解

$$1=\Phi_{\Gamma^0}(\xi)+\sum_{j=1}^{+\infty}\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi),\quad\xi\in\Gamma_p,\quad(4.1.7)$$

这里 Φ_A 是集合 A 的示性函数 $\Phi_A(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in A,\\ 0, & \xi\notin A,\end{cases}$ 也有齐次单位分解

$$1=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi),\quad \xi\in\Gamma_p. \tag{4.1.8}$$

关于一个分布的 Littlewood-Paley 分解及其性质如下：

定义 4.1.2 (分布的 Littlewood-Paley 分解)　设 $f\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 为局部域 K_p 的检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$ 上的分布, 定义其 Littlewood-Paley 分解如下：称

$$f=\sum_{j=0}^{+\infty}f_j \tag{4.1.9}$$

为分布 $f=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}f_j$ 的 Littlewood-Paley 分解, 若 f_j 满足：

(i) $\operatorname{supp} f_0^\wedge\subset\Gamma^0$;

(ii) $\operatorname{supp} f_j^\wedge\subset\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}, j=1,2,\cdots$,

其中 $f_j^\wedge, j\in\mathbb{P}=\{0,1,2,\cdots\}$ 是 f_j 的分布意义下的 Fourier 变换.

每个分布都具有性质 [77],[80]：$\forall f\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 有 Littlewood-Paley 分解

$$f=\sum_{j=0}^{+\infty}f_j,$$

其中

$$\begin{cases}f_0(x)=f*p^0\Phi_{B^0}(x)\equiv f*\varphi_0(x),\\ f_j(x)=f*\left(p^j\Phi_{B^j}-p^{j-1}\Phi_{B^{j-1}}\right)(x)\equiv f*\varphi_j(x),\end{cases}\quad x\in K_p,\quad j=1,2,3,\cdots$$

与

$$\left[p^j\Phi_{B^j}(\cdot)\right]^\wedge(\xi)=\Phi_{\Gamma^j}(\xi),\quad \xi\in\Gamma_p,\quad j=0,1,2,\cdots.$$

现在定义局部域上的 Triebel 的 B 型空间、F 型空间. 为此, 取 $\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}\subset\mathbb{A}(\Gamma_p)$ 为

$$\psi_0(\xi)=\Phi_{\Gamma^0}(\xi),$$
$$\psi_j(\xi)=\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi),\quad j\in\mathbb{N},$$

记为

$$\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}=\left\{\Phi_{\Gamma^0},\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}\right\}_{j=1}^{+\infty}, \tag{4.1.10}$$

由 $\left\{\Phi_{\Gamma^0},\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}\right\}_{j=1}^{+\infty}$ 的性质：

(i) $\operatorname{supp}\Phi_{\Gamma^0}\subset\Gamma^0$, $\operatorname{supp}\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}\subset\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}$ 都是紧集;

(ii) $\Phi_{\Gamma^0}(\xi)+\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi)=1,\ \xi\in\Gamma_p$;

(iii) $\left|T_{\langle\cdot\rangle^s}\Phi^{\vee}_{\Gamma^0}(x)\right|\leqslant c_s p^{-0+0\cdot s},\ \left|T_{\langle\cdot\rangle^s}\Phi^{\vee}_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(x)\right|\leqslant c_s p^{-j+j\cdot s}$,
$s\geqslant 0,\ j\in\mathbb{N},\ x\in K_p$

知 $\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}=\left\{\Phi_{\Gamma^0},\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}\right\}_{j=1}^{+\infty}\subset\mathbb{A}(\Gamma_p)$.

定义 4.1.3 (B 型空间、F 型空间) (i) 对于 $0<r\leqslant+\infty,\ 0<t\leqslant+\infty,\ s\in\mathbb{R}$, 称

$$B^s_{rt}(K_p)=\left\{f\in\mathbb{S}^*(K_p):\|f\|_{B^s_{rt}(K_p)}<+\infty\right\}$$

为局部域 K_p 上的 B 型空间, 其中序列 $\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}\subset\mathbb{A}(\Gamma_p)$ 由 (4.1.10) 给出, 且

$$\|f\|_{B^s_{rt}(K_p)}=\left\|p^{sj}\left(\psi_j f^{\wedge}\right)^{\vee}(\cdot)\right\|_{l_t(L^r(K_p))}=\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}\left\|p^{sj}\left(\psi_j(\cdot)f^{\wedge}(\cdot)\right)^{\vee}(\cdot)\right\|^t_{L^r(K_p)}\right\}^{\frac{1}{t}}$$

$$=\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}p^{sjt}\left\{\int_{K_p}\left|\left(\psi_j(\cdot)f^{\wedge}(\cdot)\right)^{\vee}(x)\right|^r\mathrm{d}x\right\}^{\frac{t}{r}}\right\}^{\frac{1}{t}}.$$

当 $r,t=+\infty$ 时, 上述“范数”将作通常的修正 (取本性上确界); 早期的文献中也称 B 型空间为 Besov 型空间, 有些文献中还称其为 Lipschitz 空间.

(ii) 对于 $0<r<+\infty,\ 0<t\leqslant+\infty,\ s\in\mathbb{R}$, 称

$$F^s_{rt}(K_p)=\left\{f\in\mathbb{S}^*(K_p):\|f\|_{F^s_{rt}(K_p)}<+\infty\right\}$$

为局部域 K_p 上的 F 型空间, 其中序列 $\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty}\subset\mathbb{A}(\Gamma_p)$ 由 (4.1.10) 给出, 且

$$\|f\|_{F^s_{rt}(K_p)}=\left\|p^{sj}\left(\psi_j f^{\wedge}\right)^{\vee}(\cdot)\right\|_{L^r(l_t(K_p))}=\left\|\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}\left|p^{sj}(\psi_j(\cdot)f^{\wedge}(\cdot))^{\vee}(\cdot)\right|^t\right\}^{\frac{1}{t}}\right\|_{L^r(K_p)}$$

$$=\left(\int_{K_p}\left\{\sum_{j=0}^{+\infty}p^{sjt}\left|\left(\psi_j(\cdot)f^{\wedge}(\cdot)\right)^{\vee}(x)\right|^t\right\}^{\frac{r}{t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.$$

当 $r=+\infty,\quad 0<t<+\infty,\quad -\infty<s<+\infty$ 时, $F^s_{\infty t}(K_p)$ 定义为

$$F^s_{\infty t}(K_p)=\left\{f\in\mathbb{S}^*(K_p):\exists\{\psi_j\}\subset\mathbb{A}(\Gamma_p),\{f_j\}\subset L^{\infty}(K_p),\right.$$
$$\left.\text{s.t. } f=\sum_{j=0}^{+\infty}(\psi_j f_j^{\wedge})^{\vee},\|f\|_{F^s_{\infty t}(K_p)}<+\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{F^s_{\infty t}(K_p)} = \left\|p^{sj} f_j\right\|_{L^\infty(l_t(K_p))} = \left\|\left(\sum_{j=0}^{+\infty} p^{sjt} \left|f_j(\cdot)\right|^t\right)^{\frac{1}{t}}\right\|_{L^\infty(K_p)}.$$

注 以上定义的是非齐次 B 型与 F 型空间, 类似地, 可以定义齐次 B 型与 F 型空间, 亦即, 将所取的函数序列改为

$$\psi = \{\psi_j(\xi)\}_{j=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{A}(\Gamma_p), \tag{4.1.11}$$

相应的“范数”中的求和则换为双向级数. 读者不难看出, 这实际上是研究局部域 K_p 时所采用的分解方式不同,“非齐次”是将 K_p 分解为 $K_p = B^0 \bigcup \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} B^{-j} \backslash B^{-j+1}$, 而“齐次”是将 K_p 分解为 $K_p = \bigcup\limits_{j=-\infty}^{+\infty} B^{-j} \backslash B^{-j+1}$.

另一方面, 在定义中所取的 $\psi = \{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{A}(\Gamma_p)$ 将影响所得到的范数的值. Triebel[85] 对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 证明了空间 $B^s_{rt}(\mathbb{R}^n), F^s_{rt}(\mathbb{R}^n)$ 的范数与函数序列 $\psi = \{\psi_j(\xi)\}_j$ 的选取无关, 所得到的范数都是等价的. 对于局部域情形, 可以得到相同的定理, 证明方法是类似的, 这里从略.

定理 4.1.1 (1) 当 $0 < r, t \leqslant +\infty$, $-\infty < s < +\infty$ 时, 空间 $B^s_{rt}(K_p)$ 为拟 Banach 空间; 当 $1 \leqslant r, t \leqslant +\infty$ 时, 它是 Banach 空间, 并且

$$\mathbb{S}(K_p) \subset B^s_{rt}(K_p) \subset \mathbb{S}^*(K_p).$$

(2) 当 $0 < r < +\infty$, $0 < t \leqslant +\infty$, $-\infty < s < +\infty$ 时, 空间 $F^s_{rt}(K_p)$ 为拟 Banach 空间; 当 $1 \leqslant r < +\infty$, $1 \leqslant t \leqslant +\infty$ 时, 它是 Banach 空间, 并且

$$\mathbb{S}(K_p) \subset F^s_{rt}(K_p) \subset \mathbb{S}^*(K_p).$$

(3) 空间 $B^s_{rt}(K_p), F^s_{rt}(K_p)$ 的“拟范数”与 $\psi = \{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{A}(\Gamma_p)$ 的选择无关, 即 $\psi^{(1)} = \{\psi^{(1)}_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{A}(\Gamma_p), \psi^{(2)} = \{\psi^{(2)}_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{A}(\Gamma_p)$ 所决定的拟范数彼此等价.

定理 4.1.2 空间 $B^s_{rt}(K_p)$ 与 $F^s_{rt}(K_p)$, $0 < r, t \leqslant +\infty$ 有如下包含关系:

(1) 设 $0 < t_0 \leqslant t_1 \leqslant +\infty$, $-\infty < s < +\infty$,

① 若 $0 < r \leqslant +\infty$, 则 $B^s_{rt_0}(K_p) \subset B^s_{rt_1}(K_p)$;

② 若 $0 < r < +\infty$, 则 $F^s_{rt_0}(K_p) \subset F^s_{rt_1}(K_p)$.

(2) 设 $0 < t_0 \leqslant +\infty$, $0 < t_1 \leqslant +\infty$, $-\infty < s < +\infty$, 且 $\varepsilon > 0$,

③ 若 $0 < r \leqslant +\infty$, 则 $B^{s+\varepsilon}_{rt_0}(K_p) \subset B^s_{rt_1}(K_p)$;

④ 若 $0 < r < +\infty$, 则 $F^{s+\varepsilon}_{rt_0}(K_p) \subset F^s_{rt_1}(K_p)$.

(3) 设 $0<t\leqslant+\infty$, $0<r<+\infty$, $-\infty<s<+\infty$, 则

⑤ $B^s_{r\min(r,t)}(K_p)\subset F^s_{rt}(K_p)\subset B^s_{r\max(r,t)}(K_p)$.

还有常用的对偶空间 (即空间上的有界线性泛函空间) 的定理.

定理 4.1.3 空间 $B^s_{rt}(K_p)$ 与 $F^s_{rt}(K_p)$, $0<r,t\leqslant+\infty$ 的对偶空间性质如下:

(1) 设 $1\leqslant r<+\infty, 0<t<+\infty, -\infty<s<+\infty$, 则

$$\{B^s_{rt}(K_p)\}^*=B^{-s}_{r't'}(K_p).$$

(2) 设 $1\leqslant r<+\infty, 1<t<+\infty, -\infty<s<+\infty$, 则

$$\{F^s_{rt}(K_p)\}^*=F^{-s}_{r't'}(K_p),$$

其中 r', t' 分别为 r, t 的共轭数:

$$r'=\begin{cases}\dfrac{r}{r-1} & 1\leqslant r<+\infty,\\ +\infty, & 0<r<1.\end{cases}$$

(3) 设 $0<r<1, 0<t<+\infty, -\infty<s<+\infty$, 则

$$\{B^s_{rt}(K_p)\}^*=B^{-s+\left(\frac{1}{r}-1\right)}_{r't'}(K_p)=B^{-s+\left(\frac{1}{r}-1\right)}_{\infty t'}(K_p).$$

(4) 设 $0<r<1$, $0<t<+\infty$, $-\infty<s<+\infty$, 则

$$\{F^s_{rt}(K_p)\}^*=B^{-s+\left(\frac{1}{r}-1\right)}_{r'\infty}(K_p)=B^{-s+\left(\frac{1}{r}-1\right)}_{\infty\infty}(K_p).$$

(5) 设 $0<r,t\leqslant+\infty$, $s>\sigma_r=\left(\dfrac{1}{r}-1\right)_+\left(\dfrac{1}{r}-1\text{的正部}\right)$, 则

$$B^s_{rt}(K_p)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(K_p).$$

以上定理的证明都是常规的, 读者可以自行证明, 也可以参考 Triebel[85] 的经典证明, 今后将这些定理作为基本定理加以应用.

4.1.2 B 型空间与 F 型空间的特例

B 型空间与 F 型空间是具有高度概括性的空间, 许多常用的空间都包括在其中. 下面列出欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 B 型与 F 型空间的特例.

Hölder 空间: 若 $s>0$, 则 $B^s_{\infty\infty}(\mathbb{R}^n)=C^s(\mathbb{R}^n)$.

Bessel 位势空间: 若 $1<r<+\infty, -\infty<s<+\infty$, 则 $F^s_{r2}(\mathbb{R}^n)=H^s_r(\mathbb{R}^n)$.

Besov 空间: 若 $1\leqslant r<+\infty, 1\leqslant t<+\infty, s>0$, 则 $B^s_{rt}(\mathbb{R}^n)=\Lambda^s_{rt}(\mathbb{R}^n)$.

局部非齐次 Hardy 空间: 若 $0<r<+\infty$, 则 $F^0_{r2}(\mathbb{R}^n)=h_r(\mathbb{R}^n)$.

bmo 空间：若 $r=+\infty$, 则 $F^0_{\infty 2}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$.

记 $\dot{B}^s_{rt}(\mathbb{R}^n)$, $\dot{F}^s_{rt}(\mathbb{R}^n)$ 为齐次 B 型空间与 F 型空间, 则有

局部齐次 Hardy 空间：若 $0<r<+\infty$, 则 $\dot{F}^0_{r2}(\mathbb{R}^n)=H_r(\mathbb{R}^n)$.

BMO 空间：若 $r=+\infty$, 则 $\dot{F}^0_{\infty 2}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

局部域 K 上的 Bessel 位势空间、Riesz 分数阶积分等内容将在 n 维局部域 K^n 中展开.

读者不难看出, 对于局部域 K, 许多具体的空间, 如局部域 K 上的 Hardy 空间、BMO 空间等, 都有待于数学家去深入研究.

4.1.3 局部域上的 Hölder 型空间

欧氏空间上的 Hölder 空间、Lebesgue 空间与 Sobolev 空间在偏微分方程中占有极其重要的地位. 对于局部域, 定义其 Hölder 型空间、Lebesgue 型空间与 Sobolev 型空间, 它们也将在局部域 PDE 中起重要作用.

(4.1.7) 式给出了局部域 K_p 的特征群 $\Gamma_p=\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty}\Gamma^j$ 上的非齐次单位分解：

$$1=\Phi_{\Gamma^0}(\xi)+\sum_{j=1}^{+\infty}\Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi),\quad \xi\in\Gamma_p,$$

这里 $\Phi_A(\xi)$ 是集合 $A\subset\Gamma_p$ 的示性函数, (4.1.9) 则是 K_p 上的分布的 Littlewood-Palye 分解的表示式, 由此出发, 研究 K_p 上的 Hölder 型空间.

定义 4.1.4 (Hölder 型空间 $C^\sigma(K_p),\sigma\in(-\infty,+\infty)$) 局部域 K_p 上的 Hölder 型空间定义为

(i) 当 $\sigma=0$ 时, $C^0(K_p)=C(K_p)$, 这里 $C(K_p)$ 为 K_p 上的连续函数空间;

(ii) 当 $\sigma\in(0,+\infty)$ 时, $C^\sigma(K_p)$ 定义为满足如下条件的分布 $f\in\mathbb{S}^*(K_p)$ 的全体：

(a) f 具有 Littlewood-Paley 分解式 (4.1.9), $f=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}f_j$;

(b) f_j 满足 $\|f_j\|_{L^\infty(K_p)}\leqslant cp^{-j\sigma},j\in\mathbb{P}$.

对于上述 (i), (ii) 两种情形, 令

$$\|f\|_{L^\infty(K_p)}=\sup_{j\in\mathbb{P}}\left\{p^{j\sigma}\|f_j\|_{L^\infty(K_p)}\right\},\tag{4.1.12}$$

在范数 (4.1.12) 之下, $C^\sigma(K_p)$ 成为一个 Banach 空间.

(iii) 当 $\sigma\in(-\infty,0)$ 时, 定义 $C^\sigma(K_p)=B^\sigma_{\infty\infty}(K_p)$, 这里 $B^\sigma_{\infty\infty}(K_p)$ 是 B 型空间的特例, 即 $B^s_{rt}(K_p)$ 当 $s=\sigma,r=t=\infty$ 时的情形.

关于 Hölder 型空间, 有如下重要性质[57]：

定理 4.1.4 Hölder 型空间 $C^{\sigma}(K_p)$ 在 $\sigma\in[0,+\infty)$ 时具有如下性质:

(1) 若 $f\in C^{\sigma}(K_p)$, 则 $\forall\lambda\in[0,\sigma]$, f 的 p 型导数 $f^{\langle\lambda\rangle}\equiv T_{\langle\cdot\rangle^{\lambda}}f$ 存在, 且 $f^{\langle\lambda\rangle}\in C^{\sigma-\lambda}(K_p)$.

(2) 若 $T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f\in C(K_p)$, 则 $\forall\lambda\in[0,\sigma]$, f 的 p 型导数 $f^{\langle\lambda\rangle}$ 存在, 且 $f^{\langle\lambda\rangle}=T_{\langle\cdot\rangle^{\lambda}}f\in C^{\sigma-\lambda}(K_p)$.

证 由于对任意 $\sigma\in[0,+\infty)$, 都有 $\mathbb{S}(K_p)\subset C^{\sigma}(K_p)$, 且 $\mathbb{S}(K_p)$ 在 $C^{\sigma}(K_p)=B^{\sigma}_{\infty\infty}(K_p)$ 中稠密, 因此, 可以仅对 $f\in\mathbb{S}^{*}(K_p)$ 为函数的情形证明本定理.

为证 (1), 由假设 $f\in C^{\sigma}(K_p)$, $\sigma\in[0,+\infty)$, 故设 f 的 Littlewood-Paley 分解 (定义 4.1.2) 为

$$f=\sum_{j=0}^{+\infty}f_j.$$

首先, $\forall\lambda\in[0,\sigma]$, 计算

$$\begin{aligned}
T_{\langle\cdot\rangle^{\lambda}}f(x)&=\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}\langle\xi\rangle^{\lambda}f(t)\overline{\chi}_{\xi}(t-x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^{\lambda}\chi_x(\xi)\left\{\int_{K_p}f(t)\overline{\chi}_{\xi}(t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^{\lambda}f^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^{\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}f_j^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma^0}\langle\xi\rangle^{\lambda}f_0^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}\langle\xi\rangle^{\lambda}f_j^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma^0}f_0^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}p^{j\lambda}f_j^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma^0}f_0^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}p^{j\lambda}\int_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}f_j^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma}f_0^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}p^{j\lambda}\int_{\Gamma}f_j^{\wedge}(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=f_0(x)+\sum_{j=1}^{+\infty}p^{j\lambda}f_j(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}p^{j\lambda}f_j(x).
\end{aligned}$$

由此, 有

$$T_{\langle\cdot\rangle^{\lambda}}f(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}p^{j\lambda}f_j(x),\quad\forall\lambda\in[0,\sigma].$$

于是, 由 $f\in C^{\sigma}(K)$, 可估计 $T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x)$:

$$\left\|T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(\cdot)\right\|_{L^{\infty}(K)}=\sup_{j}\left\{\left\|p^{j\sigma}f_{j}(\cdot)\right\|_{L^{\infty}(K)}\right\}\leqslant\sup_{j}\left\{p^{j\sigma}\cdot cp^{-j\sigma}\right\}\leqslant c,$$

这表明

$$f^{\langle\lambda\rangle}(x)=T_{\langle\cdot\rangle^{\lambda}}f(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}p^{j\sigma}f_{j}(x)$$

存在.

下证 $f^{\langle\lambda\rangle}(x)\in C^{\sigma-\lambda}(K_p)$, $\lambda\in[0,\sigma]$. 先证 $f^{\langle\sigma\rangle}(x)=T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x)\in C(K_p)$. 对于 $h\in K_p$, 设

$$p^{-j_0-1}\leqslant|h|\leqslant p^{-j_0},$$

推演 $T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x+h)-T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x)$:

$$\begin{aligned}
&T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x+h)-T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x)\\
&=\sum_{j=0}^{+\infty}T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}\left[f_{j}(x+h)-f_{j}(x)\right]\\
&=\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}f_0(t)\overline{\chi}_{x+h-t}(\xi)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}\langle\xi\rangle^{\sigma}f_j(t)\overline{\chi}_{x+h-t}(\xi)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\
&\quad-\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}f_0(t)\overline{\chi}_{x-t}(\xi)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi-\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}\langle\xi\rangle^{\sigma}f_j(t)\overline{\chi}_{x-t}(\xi)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}f_0(t)\left[\overline{\chi}_{\xi}(x+h-t)-\overline{\chi}_{\xi}(x-t)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\
&\quad+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\int_{K_p}\langle\xi\rangle^{\sigma}f_j(t)\left[\overline{\chi}_{\xi}(x+h-t)-\overline{\chi}_{\xi}(x-t)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

据特征的连续性, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|h|<\delta$ 时, 有

$$\left|\overline{\chi}_{\xi}(x+h-t)-\overline{\chi}_{\xi}(x-t)\right|<\varepsilon.$$

然而, 由局部域的全不连通性与非阿基米德范数的离散性, 有

$$|x|\in\left\{p^{k}:k\in\mathbb{Z}\right\},$$

因此, 当 $p^{-j_0-1}\leqslant|h|\leqslant p^{-j_0}$ 时, 若 $|h|$ 充分小, 则 $\overline{\chi}_{\xi}(x+h-t)-\overline{\chi}_{\xi}(x-t)$ 中的 $x+h-t$ 与 $x-t$ 将属于同一个 B^k. 据此, 有

$$\overline{\chi}_{\xi}(x+h-t)-\overline{\chi}_{\xi}(x-t)=0,$$

故

$$T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x+h)-T_{\langle\cdot\rangle^{\sigma}}f(x)=0.$$

于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|h| < \delta$ 时, 有

$$\left|T_{\langle\cdot\rangle^\sigma} f(x+h) - T_{\langle\cdot\rangle^\sigma} f(x)\right| < \varepsilon,$$

此即

$$T_{\langle\cdot\rangle^\sigma} f \in C(K_p).$$

用类似上述的方法, 对于 $\forall\lambda \in [0,\sigma)$, 可得到

$$T_{\langle\cdot\rangle^\lambda} f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p^{j\lambda} f_j(x),$$

从而

$$\left\|T_{\langle\cdot\rangle^\lambda} f\right\|_{L^\infty(K_p)} = \sup_j \left\{p^{j\lambda} \|f_j\|_{L^\infty(K_p)}\right\} \leqslant \sup_j \left\{p^{j\lambda} c p^{-j\sigma}\right\} \leqslant c \sup_j \left\{p^{-j(\sigma-\lambda)}\right\}.$$

于是

$$\left\|T_{\langle\cdot\rangle^\lambda} f\right\|_{L^\infty(K_p)} \leqslant c p^{-j(\sigma-\lambda)},$$

故

$$T_{\langle\cdot\rangle^\lambda} f \in C^{\sigma-\lambda}(K_p), \quad 0 \leqslant \lambda < \sigma.$$

联合 $\lambda = \sigma$ 的情形, 便得到

$$T_{\langle\cdot\rangle^\lambda} f \in C^{\sigma-\lambda}(K_p), \quad 0 \leqslant \lambda < \sigma,$$

(1) 得证.

为证 (2), 对于 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 若 $T_{\langle\cdot\rangle^\sigma} f \in C(K_p)$, 取 f 的 Littlewood-Paley 分解

$$f = f * p^0 \Phi_{B^0}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} f * \left\{p^j \Phi_{B^j}(x) - p^{j-1} \Phi_{B^{j-1}}(x)\right\} \equiv u_0(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(x),$$

其中

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f * p^0 \Phi_{B^0}(x), \\ u_j(x) &= f * \left\{p^j \Phi_{B^j}(x) - p^{j-1} \Phi_{B^{j-1}}(x)\right\}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

由 $p^0\Phi_{B^0}(x)$ 与 $p^j\Phi_{B^j}(x) - p^{j-1}\Phi_{B^{j-1}}(x)$ 的 Fourier 变换的性质

$$\left[p^j \Phi_{B^j}(\cdot)\right]^\wedge(\xi) = \Phi_{\Gamma^j}(\xi), \quad j \in \mathbb{P} = \{0\} \bigcup \mathbb{N},$$

得到

$$\operatorname{supp} u_0^\wedge \subset \Gamma^0, \quad \operatorname{supp} u_j^\wedge \subset \Gamma^j \backslash \Gamma^{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

将 f 的上述 Littlewood-Paley 分解代入 $T_{\langle\cdot\rangle^\lambda}f(x)$, $0\leqslant\lambda\leqslant\sigma$, 得

$$\begin{aligned}
T_{\langle\cdot\rangle^\lambda}f(x)&=\int_{\Gamma_p}\left\{\int_{K_p}\langle\xi\rangle^\lambda f(t)\overline{\chi}_\xi(t-x)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\lambda f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\lambda\left\{u_0(\cdot)+\sum_{j=1}^{+\infty}u_j(\cdot)\right\}^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\lambda u_0^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}\langle\xi\rangle^\lambda u_j^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\Gamma^0}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}p^{j\lambda}f^\wedge(\xi)\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\sum_{j=0}^{+\infty}p^{j\lambda}u_j(x).
\end{aligned}$$

由于 $T_{\langle\cdot\rangle^\sigma}f\in C(K_p)$, 上述级数对于任意 $x\in K_p$ 都收敛, 故必定至少有

$$p^{j\lambda}u_j(x)=o(1),$$

从而

$$\|u_j\|_{L^\infty(K_p)}\leqslant cp^{-j\lambda},\quad j\in\mathbb{P}.$$

即对于 $0\leqslant\lambda\leqslant\sigma$, 有 $f\in C^\lambda(K_p)$.

进而, 由此取 $\lambda=\sigma$, 得 $f\in C^\sigma(K_p)$, 并据本定理的性质 (1), 得到

$$T_{\langle\cdot\rangle^\lambda}f\in C^{\sigma-\lambda}(K_p),\quad\lambda\in[0,\sigma],$$

这便是 (2). 定理得证.

Hölder 型空间表述了局部域上定义的函数的 p 型光滑性, 因此它具有刻画光滑性空间的性质: 光滑性高的空间包含在光滑性低的空间中.

定理 4.1.5　当 $0\leqslant\sigma_1<\sigma_2$ 时, Hölder 型空间 $C^\sigma(K_p)$ 有包含关系

$$C^{\sigma_2}(K_p)\subset C^{\sigma_1}(K_p),$$

表明了 “p 型可导性高” 的空间包含在 “p 型可导性低” 的空间中.

这个定理的证明是显然的.

定理 4.1.4 与定理 4.1.5 的结果表明, 从 p 型光滑性的观点来看, 用拟微分算子来刻画局部域上定义的函数的 “光滑性” 是恰当的. 联合函数构造论的正、逆逼近定理, 函数导数的 Fourier 变换公式, 以及群的固有方程、固有函数、固有值的本质性质, 更可看出 Hölder 型空间 $C^\sigma(K_p)$ 的作用 [55],[57].

回到 Hölder 型空间的定义 4.1.4, 注意到, 对于 $\sigma \in [0,+\infty)$, 用 Littlewood–Paley 分解方式定义 Hölder 型空间, 在 $\sigma \in (-\infty,0)$ 时, 直接用定义

$$C^{\sigma}(K_p) = B^{\sigma}_{\infty\infty}(K_p).$$

下面的定理 4.1.6 指出, 当 $\sigma \in [0,+\infty)$ 时, 也有 $C^{\sigma}(K_p) = B^{\sigma}_{\infty\infty}(K_p)$, 因此, 局部域上的 Hölder 型空间对于 $\sigma \in \mathbb{R}$ 的定义是确切的 (well-defined).

定理 4.1.6 对于 Hölder 型空间 $C^{\sigma}(K_p)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, 有

$$\sigma = s \in \mathbb{R} \Rightarrow C^{s}(K_p) = B^{s}_{\infty\infty}(K_p).$$

证 只需证明 $s>0$ 时定理成立, 对于 $s \leqslant 0$, 由定义可得.

取

$$\psi_0(\xi) = \Phi_{\Gamma^0}(\xi), \quad \psi_j(\xi) = \Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi), \quad j \in \mathbb{N},$$

有 $\{\psi_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{A}(\Gamma_p)$. 故当 $f \in B^{s}_{\infty\infty}(K_p)$, $s \geqslant 0$ 时,

$$B^{s}_{\infty\infty}(K_p) = \left\{ f \in \mathbb{S}^*(K_p) : \|f\|_{B^{s}_{\infty\infty}(K_p)} < +\infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{B^{s}_{\infty\infty}(K_p)} = \left\| p^{sj}\left[\psi_j f^{\wedge}\right]^{\vee}(\cdot) \right\|_{l_\infty(L^\infty(K_p))} = \sup_j \left\{ \sup_x \left| p^{sj}\left[\psi_j(\cdot) f^{\wedge}(\cdot)\right]^{\vee}(x) \right| \right\}.$$

另一方面, 对于 $f \in C^{s}(K_p)$, $s>0$, 有

$$\|f\|_{C^s(K_p)} = \sup_j \left\{ p^{sj}\|f_j\|_{L^\infty(K_p)} \right\} < +\infty.$$

不难看出

$$p^{sj}\left[\psi_j(\cdot) f^{\wedge}(\cdot)\right]^{\vee}(x) = p^{sj} f_j(x).$$

故

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{s}_{\infty\infty}(K_p)} &= \sup_j \left\{ \sup_x \left| p^{sj}\left[\psi_j(\cdot) f^{\wedge}(\cdot)\right]^{\vee}(x) \right| \right\} \\
&= \sup_j \left\{ \sup_x \left| p^{sj} f_j(x) \right| \right\} = \sup_j \left\{ p^{sj}\|f_j\|_{L^\infty(K_p)} \right\} \\
&= \|f\|_{C^s(K_p)},
\end{aligned}$$

从而, 对于 $s>0$, 两个范数相等, 于是

$$f \in C^{s}(K_p) \Leftrightarrow f \in B^{s}_{\infty,\infty}(K_p).$$

定理得证.

4.1.4 局部域上的 Lebesgue 型空间、Sobolev 型空间

1. Lebesgue 型空间

Lebesgue 型空间 $L_r^s(K_p)$, $s\in(-\infty,+\infty)$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$, 定义为

$$L_r^s(K_p)=\left\{f\in\mathbb{S}^*(K_p):\|f\|_{L_r^s(K_p)}=\left\|(\langle\cdot\rangle^s f^\wedge(\cdot))^\vee(\cdot)\right\|_{L^r(K_p)}<+\infty\right\}.$$

2. Sobolev 型空间

Sobolev 型空间 $W^s(K_p)$, $s\in[0,+\infty)$, 定义为

$$W^s(K_p)=\left\{f\in\mathbb{S}^*(K_p):\|f\|_{W^s(K_p)}=\left\|(\langle\cdot\rangle^s f^\wedge(\cdot))^\vee(\cdot)\right\|_{L^2(K_p)}<+\infty\right\},$$

它是一个特殊的 Lebesgue 空间 $L_2^s(K_p)$, $s\in[0,+\infty)$.

为讨论局部域上的函数空间, 下面研究拟微分算子 T_α 的有界性.

定理 4.1.7 设 $m\in\mathbb{R},\rho>1,\delta\geqslant0$, 或 $m+3(1-\rho)<0$. 若

$$T_\sigma f(x)=\int_{\Gamma_p}\left\{\int_{K_p}\sigma(x,\xi)f(t)\overline{\chi}_\xi(t-x)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi$$

是以 $\sigma\in S_{\rho\delta}^m(K_p)$ 为象征类的拟微分算子. 则

(1) 对于 $\alpha>m$, 算子

$$T_\sigma:C^\alpha(K_p)\to C^{\alpha-m}(K_p)$$

是有界的, 且有估计

$$\|T_\sigma u\|_{C^{\alpha-m}(K_p)}\leqslant c\|u\|_{C^\alpha(K_p)};$$

(2) 对于 $s>m$, 算子

$$T_\sigma:W^s(K_p)\to W^{s-m}(K_p)$$

是有界的, 且有估计

$$\|T_\sigma u\|_{W^{s-m}(K_p)}\leqslant c\|u\|_{W^s(K_p)};$$

(3) 对于这两个空间, 当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时, 有

$$W^\alpha(K_p)\subset C^{\alpha-\frac{1}{2}}(K_p).$$

证 (1) 证 $T_\sigma : C^\alpha(K_p) \to C^{\alpha-m}(K_p)$ 与 $\|T_\sigma u\|_{C^{\alpha-m}(K_p)} \leqslant c\|u\|_{C^\alpha(K_p)}$. 取 $u \in C^\alpha(K_p)$ 的 L-P 分解

$$
\begin{aligned}
u(x) &= u * p^0\Phi_{B^0}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} u * \left\{p^j\Phi_{B^j}(x) - p^{j-1}\Phi_{B^{j-1}}(x)\right\} \\
&\equiv u_0(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(x),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&u_0(x) = f * p^0\Phi_{B^0}(x), \\
&u_j(x) = f * \left\{p^j\Phi_{B^j}(x) - p^{j-1}\Phi_{B^{j-1}}(x)\right\}, \quad j \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

并由象征 $\sigma(x,\xi) \in S^m_{\rho\delta}(K_p)$ 的分解定理 (定理 3.2.2): 对于 $m < 0$, $\rho \geqslant 1$, 或 $m \leqslant 0, \rho > 1$, 或 $m + 3(1-\rho) < 0$, 级数

$$
\sigma(x,\xi) = \sum_{k,j=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x)\psi_{kj}(\xi)
$$

绝对一致收敛, 其中

$$
\omega_{kj}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_p} \sigma(x,\xi)\Phi_{\Gamma^0}(\xi)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & j = 0, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_p} \sigma(x,\eta)\Phi_{\Gamma^0\setminus\Gamma^{-1}}(\xi)\overline{\chi}_{v(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & j > 0 \end{cases} \tag{4.1.13}
$$

与 $|\eta| = p^j|\xi|$, 以及

$$
\psi_{kj}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\Gamma^0}(\xi)\chi_{v(k)}(\xi), & j = 0, \\ \Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi)\chi_{v(k)}(\theta) = \Phi_{\Gamma^0\setminus\Gamma^{-1}}(\theta)\chi_{v(k)}(\theta), & j > 0 \end{cases} \tag{4.1.14}
$$

与 $|\theta| = p^{-j}|\xi|$. $\{v(k)\}_{k=0}^{+\infty}$ 是紧群 $K_0 \subset K_p$ 在 K_p 的陪集完全集, 且

$$
\{v(k)\}_{k=0}^{+\infty} \leftrightarrow \left\{\chi_{v(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty},
$$

这里特征集 $\left\{\chi_{v(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ 是紧群 $K_0 = D$ 的完整直交集, 且

$$
|\omega_{kj}(x)| \leqslant c_\gamma p^{j(m+(1-\rho)\gamma)}|v(k)|^{-\gamma}, \tag{4.1.15}
$$

则 (4.1.13)~(4.1.15)、$C^{\alpha}(K_p)$ 的定义, 以及 $\operatorname{supp}\psi_{kj}\bigcap\operatorname{supp}u_l^{\wedge}=\varnothing$, $j\neq l$ 共同给出

$$\begin{aligned}
T_{\sigma}u(x) &= \int_{\Gamma_p}\sigma(x,\xi)\,u^{\wedge}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma_p}\sigma(x,\xi)\sum_{l=0}^{+\infty}u_l^{\wedge}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\sum_{l=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\sum_{k,j=0}^{+\infty}\omega_{kj}(x)\,\psi_{kj}(\xi)\,u_l^{\wedge}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k,j=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\omega_{kj}(x)\,\psi_{kj}(\xi)\,u_l^{\wedge}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\equiv\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}I_{kl}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由 $T_{\sigma}u(x)=\sum\limits_{l=0}^{+\infty}T_{\sigma}u_l(x)$, 得

$$\begin{aligned}
|T_{\sigma}u_l(x)| &\equiv\left|\sum_{k=0}^{+\infty}I_{kl}\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\omega_{kl}(x)\,\psi_{kl}(\xi)\,u_l^{\wedge}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\\
&=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\omega_{kl}(x)\,\psi_{kl}(\xi)\,|\xi|^{-\alpha}\,|\xi|^{\alpha}\,u_l^{\wedge}(\xi)\,\Phi_{\Gamma^l\setminus\Gamma^{l-1}}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\\
&\leqslant\left|\sum_{k=0}^{+\infty}p^{-l\alpha}\,|\omega_{kl}(x)|\int_{\Gamma_p}|\xi|^{\alpha}\,u_l^{\wedge}(\xi)\,\chi_{v(k)}(\theta)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\\
&\leqslant cp^{-l\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}|\omega_{kl}(x)|\,\|u_l\|_{C^{\alpha}(K_p)}\\
&\leqslant cp^{-l(\alpha-m)}\sum_{k=0}^{+\infty}p^{l(1-\rho)\gamma}\,|v(k)|^{-\gamma}\,\|u_l\|_{C^{\alpha}(K_p)},
\end{aligned}$$

其中 $|\theta|=p^{-l}|\xi|$. 据假设, $\alpha-m>0$, $\rho>1$, 得到

$$|T_{\sigma}u_l(x)|\leqslant cp^{-l(\alpha-m)}\,\|u\|_{C^{\alpha}(K_p)}\,.$$

继而, 有

$$\begin{aligned}
(T_{\sigma}u_l(\cdot))^{\wedge}(\xi) &=\sum_{k=0}^{+\infty}I_{kl}^{\wedge}(\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\omega_{kl}^{\wedge}(\xi-\eta)\,u_l^{\wedge}(\eta)\,\chi_{v(k)}(\theta)\,\mathrm{d}\eta\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p}\omega_{kl}^{\wedge}(\eta)\,u_l^{\wedge}(\xi-\eta)\,\Phi_{\Gamma^l\setminus\Gamma^{l-1}}(\xi-\eta)\,\chi_{v(k)}(\theta')\,\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

其中 $|\theta'|=p^{-l}|\xi-\eta|$.

因为 $\operatorname{supp}(I_{kl})^{\wedge}(\xi)\subset\Gamma^l$, 据文献 [77] 中的附注 1 得到

$$T_{\sigma}u\in C^{\alpha-m}(K_p)$$

与

$$\|T_\sigma u\|_{C^{\alpha-m}(K_p)} \leqslant c\,\|u\|_{C^\alpha(K_p)}\,.$$

从而 (1) 得证.

(2) 证 $T_\sigma : W^s(K_p) \to W^{s-m}(K_p)$ 与 $\|T_\sigma u\|_{W^{s-m}(K_p)} \leqslant c\|u\|_{W^s(K_p)}$. 估计

$$\begin{aligned}
\|T_\sigma u_l\|_{L^2(K_p)} &= \left\{\int_{K_p} |T_\sigma u_l(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\int_{K_p} \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Gamma_p} \omega_{kl}(x)\,\Phi_{\Gamma^l\setminus\Gamma^{l-1}}(\xi)\,\chi_{v(k)}(\theta)\,u_l^\wedge(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\left\{\int_{K_p}\left|\omega_{kl}(x)\int_{\Gamma_p} u_l^\wedge(\xi)\,\chi_{v(k)}(\theta)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\|\omega_{kl}\|_{L^\infty(K_p)}\,\|u_l\|_{L^2(K_p)} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} c_\gamma p^{l(m+(1-\rho)\gamma)}\,|v(k)|^{-\gamma}\,\|u_l\|_{L^2(K_p)} \\
&\leqslant c_\gamma p^{l(m+(1-\rho)\gamma)} c_l p^{-ls}\,\|u\|_{W^s(K_p)} \leqslant c_l p^{-l(s-m)}\,\|u\|_{W^s(K_p)},
\end{aligned}$$

由文献 [77] 中的定理 2 得到

$$T_\sigma u \in W^{s-m}(K_p)$$

与

$$\|T_\sigma u\|_{W^{s-m}(K_p)} \leqslant c\,\|u\|_{W^s(K_p)}\,.$$

此即 (2).

(3) 证 $W^\alpha(K_p) \subset C^{\alpha-\frac{1}{2}}(K_p)$. 取 $u \in W^\alpha(K_p)$, 其 L-P 分解为

$$u = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j,$$

这里

$$\begin{aligned}
&(u_j)^\wedge(\xi) = \psi_j(\xi)\,u^\wedge(\xi), \quad j \in \mathbb{P}, \\
&\psi_j(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\Gamma^0}(\xi), & j = 0, \\ \Phi_{\Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}}(\xi), & j > 0, \end{cases} \\
&\mathrm{supp}u_j^\wedge(\xi) \subset \begin{cases} \Gamma^0, & j = 0, \\ \Gamma^j\setminus\Gamma^{j-1}, & j > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

以及

$$\|u_j\|_{L^2(K_p)} \leqslant c_j p^{-j\alpha}, \quad \left\{\sum_{j=0}^{+\infty} |c_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

注意到, 在局部域 K_p 上,

$$\psi_j(\xi) = \psi_1(\eta), \quad j \in \mathbb{P},$$

$|\xi| = p^j = p^{j-1}|\eta|$, 于是得到

$$u_j(x) = p^{j-1}(\psi_1)^{\vee} * u_j(x) = p^{j-1}\int_{K_p} (\psi_1)^{\vee}(y)\, u_j(x-z)\,\mathrm{d}z, \quad |y| = p^{-j+1}|z|.$$

再由

$$\left\|(\psi_1)^{\vee}\right\|_{L^2(K_p)} = \left(p^{j-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

得到

$$\begin{aligned}\|u_j\|_{L^\infty(K_p)} &\leqslant p^{j-1}\|u_j\|_{L^2(K_p)} \left\|(\psi_1)^{\vee}\right\|_{L^2(K_p)} \leqslant c_j \cdot p^{j-1} \cdot \left(p^{j-1}\right)^{-\frac{1}{2}} p^{-j\alpha}\|u\|_{W^\alpha(K_p)} \\ &\leqslant c \cdot \left(p^{-j\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right)\|u\|_{W^\alpha(K_p)}, \quad j \in \mathbb{P},\end{aligned}$$

且 $c > 0$, 这蕴含

$$u \in C^{\alpha-\frac{1}{2}}(K_p)$$

与

$$\|u\|_{C^{\alpha-\frac{1}{2}}(K_p)} \leqslant c\|u\|_{W^\alpha(K_p)}.$$

此即 (3). 定理得证.

定理 4.1.8　设 $\sigma \in S^m_{\rho\delta}(K_p)$, 且 $m + 3(1-\rho) < 0$ 与 $m < 0$, 则 $f \in L^r(K_p)$ 蕴含 $T_\sigma f \in L^r(K_p), 1 \leqslant r < +\infty$, 且成立

$$\|T_\sigma f\|_{L^r(K_p)} \leqslant c\|f\|_{L^r(K_p)}, \quad 1 \leqslant r < +\infty.$$

证　推导如下: 取 $f \in L^r(K_p)$, 则

$$\begin{aligned}T_\sigma f(x) &= \int_{\Gamma_p} \sigma(x,\xi) \int_{K_p} f(t)\,\chi_\xi(x-t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\Gamma_p} \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x)\,\psi_j(\xi)\,\chi_{v(k)}\left(p^j\xi\right) \int_{K_p} f(t)\,\chi_\xi(x-t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x) \int_{\Gamma_p} \psi_j(\xi)\,\chi_{v(k)}\left(p^j\xi\right) \int_{K_p} f(t)\,\chi_\xi(x-t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x) \int_{K_p} f(x-t) \int_{\Gamma_p} \psi_j(\xi) \chi_{v(k)}(p^j\xi) \chi_\xi(t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x) \int_{K_p} f(x-t) \int_{\Gamma_p} \psi_j(\xi) \chi_{p^j v(k)+t}(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{kj}(x) g_{kj}(x),
\end{aligned}
$$

其中

$$
g_{kj}(x) = f * h_{kj}(x), \quad h_{kj}(x) = \int_{\Gamma_p} \psi_j(\xi) \chi_{p^j v(k)+x}(\xi) \mathrm{d}\xi.
$$

于是, 有

$$
\begin{aligned}
\|T_\sigma f\|_{L^r(K_p)} &= \left\{ \int_{K_p} |T_\sigma f(x)|^r \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \int_{K_p} |\omega_{kj}(x) g_{kj}(x)|^r \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{r}} \\
&= \|\omega_{00} g_{00}\|_{L^r(K_p)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \|\omega_{k0} g_{k0}\|_{L^r(K_p)} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \|\omega_{kj} g_{kj}\|_{L^r(K_p)} + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \|\omega_{kj} g_{kj}\|_{L^r(K_p)} \\
&\leqslant c \left\{ \|f * h_{00}\|_{L^r(K_p)} + \sum_{k=1}^{+\infty} |v(k)|^{-2} \|f * h_{k0}\|_{L^r(K_p)} \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} p^{jm} \|f * h_{kj}\|_{L^r(K_p)} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} |v(k)|^{-2} p^{j(m+3(1-\rho))} \|f * h_{kj}\|_{L^r(K_p)} \right\} \\
&\leqslant c \|f\|_{L^r(K_p)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} |v(k)|^{-2} \right. \\
&\quad \left. + 2(1-p^{-1}) \left[\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} p^{jm} + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} |v(k)|^{-2} p^{j(m+3(1-\rho))} \right] \right\} \\
&\leqslant C \|f\|_{L^r(K_p)}.
\end{aligned}
$$

定理得证.

定理 4.1.9 设 $\sigma \in S^m_{\rho\delta}(K_p)$, 且 $m + ([s]+1)\delta + 3(1-\rho) < 0$ 与 $m < 0$, 则 $f \in B^s_{rt}(K_p)$ 蕴含 $T_\sigma f \in B^s_{rt}(K_p), 1 \leqslant r, t < +\infty$, 且成立

$$
\|T_\sigma f\|_{B^s_{rt}(K_p)} \leqslant c \|f\|_{B^s_{rt}(K_p)}, \quad 1 \leqslant r, t < +\infty.
$$

特别地, 当 $\rho = 1, \delta = 0, m < 0$ 与 $s > 0$ 时, $f \in B^s_{rt}(K_p)$ 蕴含 $T_\sigma f \in B^s_{rt}(K_p)$, $1 \leqslant r, t < +\infty$, 且

$$\|T_\sigma f\|_{B^s_{rt}(K_p)} \leqslant c\|f\|_{B^s_{rt}(K_p)}, \quad 1 \leqslant r, t < +\infty.$$

证　仅叙述证明要点: 估计

$$T_\sigma f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\omega_{kj}(x) g_{kj}(x)$$

的 $B^s_{rt}(K_p)$ 范数, 其中

$$g_{kj}(x) = f * h_{kj}(x), \quad h_{kj}(x) = \int_{\Gamma_p}\psi_j(\xi)\chi_{p^j v(k)+x}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

有

$$\begin{aligned}
&\|T_\sigma f(x)\|_{B^s_{rt}(K_p)}\\
&= \left\{\int_{K_p}\|T_\sigma f(\cdot - y) - T_\sigma f(\cdot)\|^t_{L^r(K_p)}|y|^{-(st+1)}\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{t}}\\
&= \left\{\int_{K_p}\left\|\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}[\omega_{kj}(\cdot-y)\,g_{kj}(\cdot-y)-\omega_{kj}(\cdot)\,g_{kj}(\cdot)]\right\|^t_{L^r(K_p)}|y|^{-(st+1)}\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{t}}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{\int_{K_p}\|\omega_{kj}(\cdot - y)\,g_{kj}(\cdot - y) - \omega_{kj}(\cdot)\,g_{kj}(\cdot)\|^t_{L^r(K_p)}|y|^{-(st+1)}\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{t}}.
\end{aligned}$$

设

$$I_{kj} \equiv \left\{\int_{K_p}\|\omega_{kj}(\cdot-y)\,g_{kj}(\cdot-y)-\omega_{kj}(\cdot)\,g_{kj}(\cdot)\|^t_{L^r(K_p)}|y|^{-(st+1)}\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{t}}, \quad j, k \in \mathbb{P},$$

对 I_{kj} 作细致的估计, 便可得到定理的结论 [68].

思 考 题

1. 建立局部域 K_p 上的齐次 B 型空间与齐次 F 型空间的相应理论.
2. 思考如何建立乘群 K_p^* 上的函数空间理论.
3. 试证定理 4.1.1~4.1.3.
4. 研究局部域 K_p 上 B 型空间的特例与 F 型空间的特例, 引进相应于 $\mathbb{R}^n$ 情形的特例, 研究这些新空间的性质, 并与 $\mathbb{R}^n$ 情形相比较 (注意, 其中很多是开问题).
5. 局部域 K_p 上的 Hölder 空间能在 K_p^* 上的推广吗? 要进行哪些准备?

4.2 局部域 K_p 上的 Lipschitz 类

Hölder 空间与 Lipschitz 类在数学的各个领域中屡见不鲜, 其作用也是众所周知的. 科学家们熟悉这类空间中函数的性质, 而且付诸应用. 应用的广泛性在所有科技领域中也是首屈一指的. 那么, 对于局部域上定义的函数 (或分布), 是否也有这样的函数类, 它们的性质又如何呢? 本节专门研究这个问题.

4.2.1 局部域上的 Lip 类

设 $f: K_p \to \mathbb{C}$ 为 K_p 上 Haar 可测的复值函数.

定义 4.2.1 (Lip 类) 设 $C(K_p)$ 为局部域 K_p 上的连续函数空间, 对于 $\alpha > 0$, 称

$$\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) = \left\{ f \in C(K_p) : \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{C(K_p)} = O(|h|^{\alpha}), h \in K_p \right\}$$

为局部域 K_p 上空间 $C(K_p)$ 中的 Lipschitz 类, 简称 Lip 类 (易见, 这是在定义 3.4.4 的式 (3.4.25) 中取 $X(K_p) = C(K_p)$ 得到的).

首先给出局部域 K_p 上函数空间与 Lip 类的关系.

定理 4.2.1 对于局部域 K_p, 有

$$\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) = C^{\alpha}(K_p), \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

证 设 $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, K_p)$. 由 $\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) \subset C(K_p) \subset \mathbb{S}^*(K_p)$, 利用 K_p 的特征群 Γ_p 上的单位分解 (4.1.7),

$$1 = \Phi_{\Gamma^0}(\xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} \Phi_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}(\xi), \quad \xi \in \Gamma_p,$$

得到

$$f^{\wedge}(\xi) = f^{\wedge}(\xi)\Phi_{\Gamma^0}(\xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} f^{\wedge}(\xi)\Phi_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}(\xi) = f_0^{\wedge}(\xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} f_j^{\wedge}(\xi),$$

其中

$$f_0^{\wedge}(\xi) = f^{\wedge}(\xi)\Phi_{\Gamma^0}(\xi) = \left[(f^{\wedge})^{\vee} * \Phi_{\Gamma^0}^{\vee}\right]^{\wedge}(\xi),$$

$$f_j^{\wedge}(\xi) = f^{\wedge}(\xi)\Phi_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}(\xi) = \left[(f^{\wedge})^{\vee} * \Phi_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}^{\vee}\right]^{\wedge}(\xi), \quad j \in \mathbb{N}.$$

由此得

$$f_0(x) = f * \Phi_{\Gamma^0}^{\vee}(x) = \int_{K_p} f(x-t)\Phi_{\Gamma^0}^{\vee}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f * \Phi^{\vee}_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}(x) \\ &= \int_{K_p} f(x-t)\Phi^{\vee}_{\Gamma^j}(t)\mathrm{d}t - \int_{K_p} f(x-t)\Phi^{\vee}_{\Gamma^{j-1}}(t)\mathrm{d}t, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

据

$$\begin{aligned} &\Phi^{\vee}_{\Gamma^0}(x) = p^0 \Phi_{B^0}(x), \\ &\Phi^{\vee}_{\Gamma^j}(x) - \Phi^{\vee}_{\Gamma^{j-1}}(x) = p^j \Phi_{B^j}(x) - p^{j-1}\Phi_{B^{j-1}}(x), \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \int_{K_p} p^0 f(x-t)\Phi_{B^0}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{B^0} f\left(x - \beta^0 y\right)\Phi_{B^0}\left(\beta^0 y\right)\mathrm{d}y, \\ f_j(x) &= \int_{K_p} p^j f(x-t)\Phi_{B^j}(t)\mathrm{d}t - \int_{K_p} p^{j-1} f(x-t)\Phi_{B^{j-1}}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{K_p} p^j f(x-\beta^j y)\Phi_{B^0}(\beta^j y)\mathrm{d}(\beta^j y) \\ &\quad - \int_{K_p} p^{j-1} f(x-\beta^{j-1}y)\Phi_{B^0}(\beta^{j-1}y)\mathrm{d}(\beta^{j-1}y), \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

其中 $|\beta| = p^{-1}$. 于是, 由

$$f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, K_p) \Rightarrow \|\Delta_h f\|_{C(K_p)} = O\left(|h|^{\alpha}\right),$$

并令

$$h = \left(x - \beta^j y\right) - \left(x - \beta^{j-1} y\right) = \beta^{j-1} y - \beta^j y,$$

可得范数估计

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L^\infty(K_p)} &\leqslant \left\| \int_{B^0} \left| f\left(\cdot - \beta^0 y\right)\Phi_{B^0}\left(\beta^0 y\right)\right| \mathrm{d}y \right\|_{L^\infty(K_p)} \leqslant cp^{-0\cdot\alpha}, \\ \|f_j\|_{L^\infty(K_p)} &\leqslant \left\| \left| \int_{K_p} f(x-\beta^j y)\Phi_{B^0}(\beta^j y)\mathrm{d}y \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \int_{K_p} f(x-\beta^{j-1}y)\Phi_{B^0}(\beta^{j-1}y)\mathrm{d}y \right| \right\|_{L^\infty(K_p)} \\ &\leqslant cp^{-j\alpha}, \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

因此

$$\|f\|_{C(K_p)} = \sup_j \left\{ p^{j\alpha} \|f_j\|_{L^\infty(K_p)} \right\} < +\infty,$$

从而

$$\mathrm{Lip}\,(\alpha, K_p) \subset C^{\alpha}\,(K_p)\,, \qquad \alpha \in (0, +\infty)\,.$$

反之, 设 $f \in C^{\alpha}(K_p)$, 则由 K_p 上的单位分解定理, 得

$$f\,(x) = f_0\,(x) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j\,(x) = f * \Phi^{\vee}_{\Gamma^0}\,(x) + \sum_{j=1}^{\infty} f * \Phi^{\vee}_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}\,(x)\,.$$

不失一般性, 取 $h \in K_p$, 且 $|h| < 1$, 则存在正整数 j_0, 使

$$p^{-j_0-1} \leqslant |h| \leqslant p^{-j_0}.$$

于是

$$f\,(x+h) - f\,(x) = \sum_{j=0}^{\infty} [f_j\,(x+h) - f_j\,(x)] \equiv \sum_{j \leqslant j_0} + \sum_{j > j_0}.$$

首先估计 $\sum\limits_{j>j_0}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j>j_0} |f_j\,(x+h) - f_j\,(x)| \\
&\leqslant \sum_{j>j_0} \int_{K_p} |f\,(x+h-t) - f\,(x-t)|\, \Phi^{\vee}_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant c' p^j \sum_{j>j_0} \int_{K_p} |f\,(x+h-t) - f\,(x-t)|\, \Phi_{B^{j-1} \setminus B^j}(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{j>j_0} c' p^j p^{-j\alpha} p^{-j} \leqslant c' \sum_{j>j_0} p^{-j\alpha} \leqslant c p^{-(j_0+1)\alpha} \leqslant c\,|h|^{\alpha}\,,
\end{aligned}$$

得到

$$\sum_{j>j_0} |f_j\,(x+h) - f_j\,(x)| \leqslant c\,|h|^{\alpha}\,.$$

其次, 对于 $\sum\limits_{j \leqslant j_0}$, 有

$$\begin{aligned}
f_j\,(x+h) - f_j\,(x) &= f * \Phi^{\vee}_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}\,(x+h) - f * \Phi^{\vee}_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}\,(x) \\
&= \int_{K_p} f\,(t) \int_{\Gamma_p} \Phi_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}\,(\xi)\, \{\chi_{x+h-t}\,(\xi) - \chi_{x-t}\,(\xi)\}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t \\
&= \int_{K_p} f\,(t) \int_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}} \{\chi_{x+h-t}\,(\xi) - \chi_{x-t}\,(\xi)\}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

为计算 $\chi_{x+h-t}\,(\xi) - \chi_{x-t}\,(\xi)$, 设 $\xi \in \Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}$, $j > 0$ 与 $h \in K_p$ 的表示如下:

$$\xi = \xi_{-j}\beta^{-j} + \xi_{-j+1}\beta^{-j+1} + \cdots, \quad j > 0,$$

$$h = h_{j_0}\beta^{j_0} + h_{j_0+1}\beta^{j_0+1} + \cdots,$$

并且令

$$x - t = y_k\beta^k + y_{k+1}\beta^{k+1} + \cdots, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

当 j_0 充分大时 (即 $p^{-j_0-1} \leqslant |h| \leqslant p^{-j_0}$, 当 $|h|$ 充分小时), 由于 $\chi_{x+h-t}(\xi) - \chi_{x-t}(\xi)$ 中的 $x-t+h$ 与 $x-t$ 将属于同一个 B^k, $k \in \mathbb{Z}$, 故

$$\begin{aligned} x - t &= y_k\beta^k + y_{k+1}\beta^{k+1} + \cdots \in B^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x - t + h &= y_k\beta^k + y_{k+1}\beta^{k+1} + \cdots + y_{j_0-1}\beta^{j_0-1} \\ &\quad + (y_{j_0} + h_{j_0})\beta^{j_0} + (y_{j_0+1} + h_{j_0+1})\beta^{j_0+1} + \cdots \in B^k, \end{aligned}$$

于是, 在 j_0 充分大时, 有 $\chi_{x+h-t}(\xi) - \chi_{x-t}(\xi) = 0$. 从而

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{j \leqslant j_0} [f_j(x+h) - f_j(x)]\right| \\ &\leqslant \sum_{j \leqslant j_0} \left|\int_{K_p} f(t) \int_{\Gamma_p} \Phi_{\Gamma^j \setminus \Gamma^{j-1}}(\xi) \{\chi_{x+h-t}(\xi) - \chi_{x-t}(\xi)\} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t\right| \leqslant c|h|^\alpha. \end{aligned}$$

最后, 联合对于 $\sum\limits_{j > j_0}$ 与 $\sum\limits_{j \leqslant j_0}$ 的估计, 得

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x+h) - f_j(x)| \\ &= \sum_{j \leqslant j_0} |f_j(x+h) - f_j(x)| + \sum_{j > j_0} |f_j(x+h) - f_j(x)| \leqslant c|h|^\alpha. \end{aligned}$$

这就证明了 $\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) \supset C^\alpha(K_p)$, $\alpha \in (0, +\infty)$.

于是, 在局部域情形, 有

$$\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) = C^\alpha(K_p), \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

定理得证.

定理 4.2.2 对于局部域 K_p, 当 $\alpha > \beta$, α, $\beta \in (0, +\infty)$ 时, 有

$$\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) \subset \mathrm{Lip}(\beta, K_p).$$

证 由 $C^\alpha(K_p)$ 的性质 (定理 4.1.5) 得到.

为得到 Lip 类进一步的性质, 下面证明一个命题.

命题 设 $0<r\leqslant+\infty$, $0<t\leqslant+\infty$, $s>\sigma_r=\left(\frac{1}{r}-1\right)_+$, 则

$$B_{rt}^{s}(K_p)\subset L_{\mathrm{loc}}^{1}(K_p).$$

这表明, 局部域 K_p 上的 B 型空间 $B_{rt}^{s}(K_p)$ 在所述条件下, 其中的元是局部可积函数.

证 (1) 首先设 $1\leqslant r\leqslant\infty$, 故正部 $\sigma_r=\left(\frac{1}{r}-1\right)_+=0$, 所以 $s>0=\sigma_r$.

对于 $f\in B_{rt}^{s}(K_p)\subset\mathbb{S}^*(K_p)$, 其 L-P 分解 $f=\sum_{j=0}^{\infty}f*\varphi_j$ 在 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 意义下收敛, 其中 $\varphi_0(x)=p^0\Phi_{B^0}(x),\varphi_j(x)=(p^j\Phi_{B^j}-p^{j-1}\Phi_{B^{j-1}})(x),j=1,2,\cdots$. 于是, 考虑

(a) 若 $1\leqslant t\leqslant\infty$, 则由 Minkowski 不等式与 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}f*\varphi_j\right\|_{L^r(K_p)}&\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}p^{-js}p^{js}\|f*\varphi_j\|_{L^r(K_p)}\\&\leqslant\left(\sum_{j=0}^{\infty}p^{-jst'}\right)^{1/t'}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(p^{js}\|f*\varphi_j\|_{L^r(K_p)}\right)^t\right)^{1/t}\\&\leqslant c\|f\|_{B_{rt}^{s}(K_p)}<+\infty.\end{aligned}$$

(b) 若 $0<t<1$, 由序列空间的包含关系 $l_t\subset l_1$, 得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}f*\varphi_j\right\|_{L^r(K_p)}&\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\|f*\varphi_j\|_{L^r(K_p)}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}p^{js}\|f*\varphi_j\|_{L^r(K_p)}\\&\leqslant\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(p^{js}\|f*\varphi_j\|_{L^r(K_p)}\right)^t\right)^{1/t}\leqslant\|f\|_{B_{rt}^{s}(K_p)}<+\infty.\end{aligned}$$

故对于 $0<t\leqslant\infty$, 有

$$f\in B_{rt}^{s}(K_p)\Rightarrow f\in L^r(K_p)\subset L_{\mathrm{loc}}(K_p).$$

(2) 设 $0<r<1$, 则正部 $\sigma_r=\left(\frac{1}{r}-1\right)_+=\frac{1}{r}-1$, 所以 $s>\sigma_r=\frac{1}{r}-1$, 即 $s-\frac{1}{r}+1>0$. 于是, 由 B 型空间的一个包含关系 [45]: 若 $0<r_0\leqslant r_1<\infty$, $0<t\leqslant\infty$, $-\infty<s_1\leqslant s_0<\infty$, 且 $s_0-\frac{1}{r_0}=s_1-\frac{1}{r_1}$, 则

$$B_{r_0t}^{s_0}(K_p)\subset B_{r_1t}^{s_1}(K_p),$$

立即得到

$$B_{rt}^{s}(K_p) \subset B_{1t}^{s-\frac{1}{r}+1}(K_p).$$

再据 (1), 有 $B_{1t}^{s-\frac{1}{r}+1}(K_p) \subset L^1(K_p)$, 因而

$$B_{rt}^{s}(K_p) \subset L^1(K_p).$$

命题得证.

定理 4.2.3 设 $\alpha > 0$, 则 $\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) \subset L_{\mathrm{loc}}^1(K_p)$.

证 定理 4.1.6 已证明了 $C^{\alpha}(K_{\alpha}) = B_{\infty\infty}^{\alpha}(K_p), \alpha \in \mathbb{R}$, 于是, 对于 $\alpha > 0$, 有

$$\mathrm{Lip}(\alpha, K_p) = C^{\alpha}(K_p) = B_{\infty\infty}^{\alpha}(K_p) \subset L_{\mathrm{loc}}^1(K_p),$$

从而得到本定理的结论.

4.2.2 欧氏空间上的函数空间链

本小节回顾欧氏空间上的函数空间链, 下一小节则研究局部域上的相应问题, 这两节的主要参考文献为 [55], [57], [89], [102].

经典函数构造论中的一个有趣例子:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-2k} \cos 2^k x$$

的最佳逼近为

$$E_n(C_{2\pi}, f) = \inf_{p \in T_n} \|f - p\|_{C_{2\pi}} = O\left(n^{-2}\right),$$

而其二阶连续模却为

$$\omega_2(C_{2\pi}, f, \delta) \geqslant \frac{4}{\pi^2} \delta^2 \frac{\ln \frac{1}{2\delta}}{\ln 2}.$$

大约在 20 世纪 50 年代, 前苏联数学家 C. Б. Стечкин 断言, 人们在刻画函数光滑性质时, 不仅需要二阶连续模, 而且还需要三阶、四阶 …….

为了更好地介绍局部域上刻画函数光滑性的工具, 回顾欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 情形, 并以 $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ 为例.

1. m 阶连续模与 m 阶 Lip 函数类

设 $C_{2\pi}^m \equiv C^m([0, 2\pi])$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 m 次连续可导的 2π 周期函数空间, $m \in \mathbb{N}$.

定义 4.2.2 (m 阶差分) 对于 $f \in C_{2\pi}$, $m \in \mathbb{N}$, 其 1 阶、2 阶、…、m 阶差分分别定义为

$$\Delta_h^1 f(x) \equiv \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h f)(x) = \Delta_h(f(x+h) - f(x))$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h\left(\Delta_h^{m-1}\right) f(x).$$

定义 4.2.3 (m 阶连续模) 对于 $f \in C_{2\pi}$, $m \in \mathbb{N}$, m 阶连续模定义为

$$\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{C_{2\pi}}.$$

2 阶连续模 $\omega_2(C_{2\pi}, f, \delta) \equiv \omega^*(C_{2\pi}, f, \delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \left\|\Delta_h^2 f(\cdot)\right\|_{C_{2\pi}}$, 也常称为光滑模.

m 阶连续模有如下熟知的性质:

定理 4.2.4 设 $\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta)$ 是 $f \in C_{2\pi}$ 的 m 阶连续模, 则

(1) $\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta)$ 是 $\delta\,(\delta \geqslant 0)$ 的单调增加函数,

$$\delta_1 \leqslant \delta_2 \Rightarrow \omega_m(C_{2\pi}, f, \delta_1) \leqslant \omega_m(C_{2\pi}, f, \delta_2);$$

(2) $\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta)$ 是 $m\,(m \in \mathbb{N})$ 的"递减"函数

$$j < m \Rightarrow \omega_m(C_{2\pi}, f, \delta) \leqslant 2^{m-j}\omega_j(C_{2\pi}, f, \delta);$$

(3) $\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta)$ 关于 $\delta\,(\delta \geqslant 0)$ 具有"伸缩"性质

$$\lambda > 0 \Rightarrow \omega_m(C_{2\pi}, f, \lambda\delta) \leqslant (1+\lambda)^m \omega_m(C_{2\pi}, f, \delta);$$

(4) $\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta)$ 关于 $\delta\,(\delta \geqslant 0)$ 具有"尺度"性质

$$\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \frac{\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta_2)}{\delta_2^m} \leqslant \frac{2^m \omega_m(C_{2\pi}, f, \delta_1)}{\delta_1^m}.$$

进而, 当 $\delta \to 0$ 时, 有

$$\lim_{\delta\to0+} \frac{\omega_m(C_{2\pi}, f, \delta)}{\delta^m} > 0, \quad \forall f \neq \text{const},$$

以及

$$\lim_{\delta\to0+} \omega_m(C_{2\pi}, f, \delta) = o(\delta^m) \Rightarrow f = \text{const}.$$

定义 4.2.4 (m 阶 Lip 类) 对于 $0 < \alpha \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$, m 阶 Lip 类定义为

$$\mathrm{Lip}_m(\alpha, C_{2\pi}) = \left\{f \in C_{2\pi} : \omega_m\left(C_{2\pi}, f, \delta\right) = O\left(\delta^{\alpha}\right), \delta \to 0^+\right\},$$

称为 m 阶 Lipschitz α 类, 简称为 m 阶 Lip 类, 并简记为 $\mathrm{Lip}_m\alpha$.

利用连续模的性质, 不难证明下述定理:

定理 4.2.5　设 $\mathrm{Lip}_m\alpha$ 是 m 阶 Lip 类, $0<\alpha\leqslant m$, $m\in\mathbb{N}$, 则

(1) 关于 m, Lip 类 $\mathrm{Lip}_m\alpha$, $m\in\mathbb{N}$, 具有下述包含关系:

$$0<\alpha<m \Rightarrow \mathrm{Lip}_m\alpha = \mathrm{Lip}_{m+1}\alpha,$$
$$\alpha = m \Rightarrow \mathrm{Lip}_m m \subsetneq \mathrm{Lip}_{m+1} m;$$

(2) 关于 α, Lip 类 $\mathrm{Lip}_m\alpha$, $0<\alpha\leqslant m$, 具有下述包含关系:

$$\beta<\alpha \Rightarrow \mathrm{Lip}_m\alpha \subsetneq \mathrm{Lip}_m\beta;$$

(3) Lip 函数 $f\in\mathrm{Lip}_m\alpha$, $0<\alpha\leqslant m$, 具有下述估计: 对于 $m\in\mathbb{N}$, 存在常数 M_m, 使得对每个 $\delta>0$, 有

$$f\in\mathrm{Lip}_m\alpha \Rightarrow \omega_m\left(C_{2\pi}, f, \delta\right) \leqslant M_m\delta^{\alpha}.$$

2. C^m 与 C^{m-1}, $m\in\mathbb{N}$, 之间的链

首先注意到, 在欧氏空间的情形, 有熟知的结果:

$$\begin{cases} 0<\alpha<m: & \mathrm{Lip}_m\alpha = \mathrm{Lip}_{m+1}\alpha, \\ \alpha = m: & \mathrm{Lip}_m m \subsetneq \mathrm{Lip}_{m+1} m, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

$C^1\equiv C^1_{2\pi}$ 与 $C\equiv C_{2\pi}$ 之间的一个"链":

$$\begin{array}{c} C^1 \subsetneq \mathrm{Lip}1 \subsetneq \mathrm{Lip}\alpha \subsetneq \mathrm{Lip}\beta \subsetneq C, \\ \uparrow \\ 1>\alpha>\beta>0. \end{array} \tag{4.2.2}$$

以及它的延伸

$$\begin{array}{c} C^m \subsetneq \mathrm{Lip}_m m \subsetneq \mathrm{Lip}_{m+1} m \subsetneq \mathrm{Lip}_{m+1}\alpha \subsetneq \mathrm{Lip}_{m+1}\beta \subsetneq C^{m-1} \\ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \alpha = m \qquad\qquad\quad m>\alpha>\beta>0 \end{array} \tag{4.2.3}$$

上述关系对于 $C^r\equiv C^r(\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}$ 也成立.

进而, 对于 $m \in \mathbb{N}$, 成立逼近论的正定理 (Jackson 定理)、逆定理 (Bernstein 定理) 与等价性定理:

$$\begin{cases} 0 < \alpha < m : f \in \mathrm{Lip}_m\alpha \Leftrightarrow E_n(C_{2\pi}, f) = O(n^{-\alpha}), \\ \alpha = m : f \in \mathrm{Lip}_m m \Rightarrow E_n(C_{2\pi}, f) = O(n^{-m}), \end{cases}$$

$$f \in \mathrm{Lip}_{m+1}m \Leftrightarrow E_n(C_{2\pi}, f) = O(n^{-m}). \tag{4.2.4}$$

若用 $\mathrm{Lip}^*\alpha \equiv \mathrm{Lip}^*(\alpha, \mathbb{R})$ 表示二阶 Lip 类, 可更详细地比较 C^1 与 C 之间的情形:

$$\begin{array}{c} C^1 \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lip}1 \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lip}^*1 \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lip}^*\alpha = \mathrm{Lip}\alpha \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lip}\,\beta = \mathrm{Lip}^*\beta \underset{\neq}{\subset} C \\ \text{不等}\nwarrow \qquad \nearrow\text{相等} \qquad \nearrow\text{相等} \\ 1 > \alpha > 0 \qquad 1 > \alpha > \beta > 0 \end{array} \tag{4.2.5}$$

注意到这里有一个"缺口": 在 Lipα 与 Lip$^*\alpha$ 之间, 当 $0 < \alpha < 1$ 时二者相等, 而 $\alpha = 1$ 时却不等, 即

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \mathrm{Lip}\alpha = \mathrm{Lip}^*\alpha,$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \mathrm{Lip}1 \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lip}^*1. \tag{4.2.6}$$

上式中的第二个关系式有反例:

$$f(x) = \sin \ln |\sin x|,$$

说明不能得到反向的包含关系.

这个"缺口"也反映在逼近的等价性定理上:

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1 : f \in \mathrm{Lip}\alpha \Leftrightarrow E_n(C_{2\pi}, f) = O(n^{-\alpha}), \\ \alpha = 1 : f \in \mathrm{Lip}1 \Rightarrow E_n(C_{2\pi}, f) = O(n^{-1}) \end{cases} \tag{4.2.7}$$

与

$$0 < \alpha \leqslant 1 : f \in \mathrm{Lip}^*\alpha \Leftrightarrow E_n(C_{2\pi}, f) = O(n^{-\alpha}), \tag{4.2.8}$$

这里 $E_n(C_{2\pi}, f)$ 是函数 $f \in C_{2\pi}$ 的 n 阶最佳三角逼近[9].

用一阶差分定义的 Lipα 类与用二阶差分定义的 Lip$^*\alpha$ 类之间产生的"缺口", 也反映在 Hölder 空间 $C^\alpha \equiv C^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ 与 Zygmund 空间 $C_*^\alpha \equiv C_*^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ 之间, 即

$$\begin{array}{lll} 0<\alpha<1: C^{\alpha} \leftrightarrow & \mathrm{Lip}\alpha=\mathrm{Lip}^{*}\alpha \leftrightarrow C_{*}^{\alpha}, & \\ \alpha=1: & \mathrm{Lip}1 \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lip}^{*}1 & \\ \uparrow \text{没有 Hölder 空间} & & \uparrow \text{没有 Zygmund 空间} \\ 1<\alpha<2: C^{\alpha}, & \mathrm{Lip}^{*}\alpha \leftrightarrow C_{*}^{\alpha} & \\ & \uparrow \text{没有Lip类} & \end{array} \tag{4.2.9}$$

这里

$$C_{*}^{\alpha}=\{f \in C_{2\pi}:|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|=O(|h|)\}$$

是 Zygmund 类, 由 Zygmund 定义, 也就是 $\mathrm{Lip}^{*}1$.

还有一点要指出, 在 $\mathbb{R}$ 情形, 当 $\alpha>1$ 时, $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{R})$ 蕴含 $f=$ 常数,

$$|f(x+h)-f(x)|=o(h) \Rightarrow f=\text{const}. \tag{4.2.10}$$

4.2.3 局部域 K_p 的情形

现在给出局部域上的函数空间的关系.

设 K_p 为局部域, $D=B^0 \subset K_p$ 为 K_p 的紧子群, $\mathrm{Lip}(\alpha, D)$ 为 D 上的 Lipschitz 类, $E_{p^n}(C(D), f)$ 为 D 上的 p^n 阶最佳逼近.

定理 4.2.6 对于 $\alpha>0, r \in \mathbb{P}$, 有等价关系:

$$f^{\langle r\rangle} \in \mathrm{Lip}(\alpha, D) \Leftrightarrow E_{p^n}(C(D), f)=O\left(\left(p^n\right)^{-(r+\alpha)}\right), \quad n \rightarrow+\infty. \tag{4.2.11}$$

对于局部域 K_p, 也有

定理 4.2.7 对于 $\alpha>0, r \in \mathbb{P}$, 成立等价关系:

$$f^{\langle r\rangle} \in \mathrm{Lip}(\alpha, K_p) \Leftrightarrow E_{p^n}(C(K_p), f)=O\left(\left(p^n\right)^{-(r+\alpha)}\right), \quad n \rightarrow+\infty. \tag{4.2.12}$$

由此可以断言: 对于局部域 K_p, 为刻画函数的连续性与光滑性, 函数的一阶连续模与一阶 Lip 类已经足够了, 并不需要高阶连续模与高阶 Lip 类.

再与刻画 p 型光滑性的 Hölder 型空间 $C^{\sigma}(K_p)$ 相联系, 更可看出上述断言的正确, "缺口" 在函数空间链的关系中也消失了.

$$\begin{array}{ccll} C^{\alpha}(K_p) & \subset & C^{\beta}(K_p), & 0<\beta<\alpha<+\infty \\ \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathrm{Lip}(\alpha, K_p) & \subset & \mathrm{Lip}(\beta, K_p), & 0<\beta<\alpha<+\infty \end{array} \tag{4.2.13}$$

下面的例 4.2.1 说明, (4.2.10) 在局部域中不成立.

例 4.2.1 设 $p=2$, $x\in D=[0,1], x=0.x_1x_2x_3\cdots, x_j\in\{0,1\}, j\in\mathbb{N}$, 定义函数 $f:D=[0,1]\to\mathbb{R}$(参看图 4.2.1)

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0=x,\\ \vdots & \vdots\\ 3^{-4}, & 0.0001<x\leqslant 0.001,\\ 3^{-3}, & 0.001<x\leqslant 0.01,\\ 3^{-2}, & 0.01<x\leqslant 0.1,\\ 3^{-1}, & 0.1<x\leqslant 1.\end{cases} \tag{4.2.14}$$

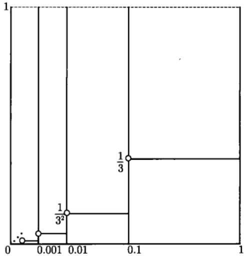


图 4.2.1

取 $h=0.\underbrace{0\cdots0}_{k-1}1=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$, 则当 $x=0$ 时, 有

$$|f(0\oplus h)-f(0)|=\left|3^{-k}-0\right|=3^{-k}=\left(2^{-k}\right)^{\log_2 3}=O\left(|h|^{\log_2 3}\right).$$

对于 $x\in(0,1]$, $x=0.x_1x_2x_3\cdots$, $x_j\in\{0,1\}$, $j\in\mathbb{N}$ 与 $h=0.\underbrace{0\cdots0}_{k-1}1=\dfrac{1}{2^k}$, 有

$$\begin{aligned}|f(x\oplus h)-f(x)|&=|f(0.x_1\cdots x_{k-1}(x_k+1)x_{k+1}\cdots)-f(0.x_1\cdots x_{k-1}x_kx_{k+1}\cdots)|\\&=O\left(|h|^{\log_2 3}\right).\end{aligned}$$

这表明 $f(x)$ 并非常数, 且 $f\in \mathrm{Lip}(\log_2 3, D)$.

4.2.4　欧氏空间分析与局部域分析比较

比较欧氏空间分析与局部域分析的特点，更有利对局部域分析的研究与应用.

式 (4.2.1)~(4.2.10) 刻画了欧氏空间 $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$ 上的函数构造特点, (4.2.11)~(4.1.13) 则刻画局部域 K_p 上的特点.

欧氏空间分析与局部域分析有这样迥然不同的性质. 究其原因, 是由于:

(1) $\mathbb{R}$ 与 K 的运算结构不同. 前者是通常欧氏空间 $\mathbb{R}$ 中的加法 $+$ 与乘法 $\times$ 运算, 后者是局部域 K 中按位加法 $\oplus$ 与乘法 $\otimes$ 运算 (又分为“不进位”与“自左至右进位”两种), 因此实数域 $(\mathbb{R},+,\times)$ 与局部域 $(K,\oplus,\otimes)$, 有全然不同的代数运算结构.

注　在 1.2.2 节中曾约定, 局部域的加法 $\oplus$ 与乘法 $\otimes$. 在不发生混淆时, 就用 $+$ 与 $\times$, 局部域记为 $(K,+,\times,|\cdot|)$. 然而, 在对 $\mathbb{R}$ 与 K 作比较时, 仍然用 $(K,\oplus,\otimes,|\cdot|)$, 以示区别.

(2) $\mathbb{R}$ 与 K 的拓扑结构不同. 前者是通常欧氏空间 $\mathbb{R}$ 的拓扑 τ, 后者是由非阿基米德赋值 $|x|$ 所确定的局部域 K 的拓扑 $|\cdot|$, 虽然二者都是局部紧拓扑域, 但 $\mathbb{R}$ 是连通的, 而 K 是全不连通的, 因此局部紧拓扑域 $(\mathbb{R},+,\times,\tau)$ 与 $(K,\oplus,\otimes,|\cdot|)$ 有全然不同的拓扑结构;

(3) $\mathbb{R}$ 与 K 的特征群 $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 与 Γ_K 的结构不同. 由特征群的对偶定理, 对于 $\mathbb{R}$, 有

$$\Gamma_{\mathbb{R}}\leftrightarrow\mathbb{R}\ (\Gamma_{[-1,1]}\leftrightarrow\mathbb{Z});$$

对于 K_p, 有

$$\Gamma_{K_p}\leftrightarrow K_p\ (\Gamma_D\leftrightarrow\{0\}\bigcup\mathbb{N}).$$

因此, $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 与 Γ_{K_p} 也分别是连通的与全不连通的 (在表 4.2.1 中, 取局部域 K 的特征数为 p, $\overline{\otimes}$ 是 K 中定义的计算特征函数的运算, 见 2.2 节).

表 4.2.1

底空间	群	特征群 (特征函数)	特征值
欧氏空间 $\mathbb{R}$	紧群 $x\in[-1,1]$	$\Gamma_{[-1,1]}=\{\exp 2\pi\mathrm{i}kx:k\in\mathbb{Z}\}$	$\lambda=\mathrm{i}k$
	局部紧群 $x\in\mathbb{R}$	$\Gamma_{\mathbb{R}}=\{\exp 2\pi\mathrm{i}yx:y\in\mathbb{R}\}$	$\lambda=\mathrm{i}y$
局部域 K_p	紧群 $x\in D$	$\Gamma_D=\left\{\exp\dfrac{2\pi\mathrm{i}k\overline{\otimes}x}{p}:k\in\{0\}\bigcup\mathbb{N}\right\}$	$\lambda=k$
	局部紧群 $x\in K_p$	$\Gamma_{K_p}=\left\{\exp\dfrac{2\pi\mathrm{i}\xi\overline{\otimes}x}{p}:\xi\in K_p\right\}$	$\lambda=\langle\xi\rangle$

特征群中的元, 即特征函数 (也称为固有函数) 亦全然不同, 分别是 $\exp 2\pi \mathrm{i} yx$ 与 $\exp \dfrac{2\pi \mathrm{i}\xi \overline{\otimes} x}{p}$. 特别注意到, 特征函数分别是 $\mathbb{R}$ 与 K_p 上 Fourier 变换的核.

从而, 特征函数所满足的方程 —— 特征方程 (也称固有方程) 亦全然不同, 它们分别为 $y' = \lambda y$ 与 $y^{\langle 1 \rangle} = \lambda y$, 这里 y' 与 $y^{\langle 1 \rangle}$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的经典导数与 K_p 上的 p 型导数, 分别表示"$\mathbb{R}$ 中的一点受其附近点的影响所发生的局部变化率"与"K_p 中的一点受 K_p 中所有点的影响所发生的整体变化率".

使得特征方程有非零解的值称为特征值 (或称固有值), 就是上表中的 λ, 特征方程的解就是特征函数.

(4) $\mathbb{R}$ 与 K 上的最佳逼近等价性定理全然不同. 事实上, 从 Fourier 分析与函数逼近论的观点来看, 最佳逼近等价性定理反映了定义在 $\mathbb{R}$ 与 K 上的函数的结构. 在 $\mathbb{R}$ 为底空间的情形, 由 (4.2.7) 给出. 然而, 在 K_p 为底空间的情形, 对于紧子群 $D = \{x \in K : |x| \leqslant 1\}$, 却有定理 4.2.6, 对于 K_p, 有定理 4.2.7.
由此可见, 一阶连续模 (从而由一阶连续模确定的 Lip 类) 完全确定了 K_p 上的等价性定理, 参见文献 [21]~[25], [27], [28], [60]~[70], [74]~[80], [100]~[104], [106]~[113].

至此, 我们从两者的群运算结构、拓扑结构、特征群 (特征值、特征函数、特征方程)、函数最佳逼近等价性定理等 4 个方面对 $\mathbb{R}$ 与 K 上的分析进行了比较.

可以清楚看到, 式 (4.2.3) 与式 (4.2.13) 分别刻画的 $\mathbb{R}$ 与 K_p 上函数的"光滑性"链表明: 经典导数适合于欧氏空间分析, "p 型导数"适合于局部域分析; $\mathbb{R}$ 上需要引入 Lip* 类, 与其上的逼近等价性定理需要用到二阶连续模相呼应; K_p 上只需引入 Lip 类, 而且

$$C^{\alpha}(K_p) \leftrightarrow \operatorname{Lip}(\alpha, K_p), \quad \alpha \in (0, +\infty)$$

恰与其逼近的等价性定理只需要用到一阶连续模相呼应.

回顾文献 [103] 中的定理 1.1: 设 $f \in L^1([0, +\infty))$, 则对每个 $t \in (-\infty, +\infty)$, 成立

$$\begin{aligned} &\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\, \overline{w}_p(t, x)\, \mathrm{d}x \\ =& \int_0^{+\infty} f(x) \exp\left[-2\pi \mathrm{i}\left(tx - (\operatorname{sgn} t)\{|t|\}\{x\}\right)\right] \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分, $w_p(t, x)$ 表示 p 进 Walsh 函数. 该定理指出了欧氏空间上 Fourier 变换与局部域上 Fourier 变换之间的实质差别, 并且证明了: 当

局部域的特征数 $p \geqslant 2(p \in \mathbb{N})$ 趋向于 $+\infty$ 时, 局部域 K 上 Fourier 分析的种种结果, 绝不是欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上 Fourier 分析的特例, 从而否定了局部域分析只是欧氏空间分析的特例的说法. 这个定理也可以与分形几何中的一个著名的结果相联系: 不断增加正 Koch 曲线的边数, 其所含 60° 顶角绝不会消失, 因此 Koch 曲线不会变为一个圆弧.

从以上分析, 有理由设想: 欧氏空间分析是刻画宏观宇宙 (大尺度) 的有力工具, 而局部域分析将提供处理微观世界 (小尺度) 以及非线性问题的重要工具与研究领域的新途径.

注　为了更好了解 $\mathbb{R}^n$ 上的函数结构, 在此列出 $\mathbb{R}$ 中的几个重要的函数类:

Dini-Lip 类: $DL = \{f \in C_{2\pi} : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta) \ln|\delta| = 0\}$.

W 类: $W = \{f \in C_{2\pi} : \omega(\delta) \leqslant A\delta(1 + |\ln\delta|)\}$, $\delta > 0$, $A > 0$ 与 δ 无关.

Zygmund 类: $Z = \{f \in C_{2\pi} : |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant M|h|\} \equiv \mathrm{Lip}^*1$.

在有限区间上, 有如下关系:

$$\mathrm{Lip}1 \subset \mathrm{Lip}^*1 \subset \mathrm{Lip}^*\alpha = \mathrm{Lip}\alpha \subset DL, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\mathrm{Lip}1 \subset W \subset \mathrm{Lip}\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

由于 "$f \in \mathrm{Lip}\ 1 \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-1})$" 之逆定理不成立, 使得逼近阶与函数的光滑性之间的联系形成很大障碍, 不用二阶连续模将无法克服这个障碍. 但是, 对于 Zygmund 类, 却有

$$f \in \mathrm{Lip}^*1 \Leftrightarrow E_n(f) = O(n^{-1});$$

对于 W 类, 当 $f \in C_{[a,b]}$ 时, 在任意闭区间 $[a', b'] \subset (a, b)$ 中, 有

$$W \Leftarrow E_n(f) = O(n^{-1}).$$

由此两关系可得到 $\mathrm{Lip}1 \subset W \subset \mathrm{Lip}^*1$ 对任意闭区间 $[a', b'] \subset (a, b)$ 成立, 却得不到在整个区间 $[a, b]$ 成立.

思　考　题

1. 建立乘群 K_p^* 上的 Lip 函数类理论.
2. 试证定理 4.2.4～4.2.5.
3. 分析欧氏空间 $\mathbb{R}$ 分析、局部域 K_p 分析的差异的原因.
4. 设计建立 K_p^* 分析的思路, 并探讨 K_p^* 分析的特征性质.

4.3 局部域 K_p 上的分形空间

与分形几何理论有关的数学问题研究已经有很长的历史, 可以追溯到 Cantor 与 Weierstrass 等著名数学家的有关工作, 不过在那个时代, 并未提出"分形"这个名词. 20 世纪 20 年代末, 分形几何在物理学和信号处理领域中获得重要应用, 更促使分形几何的快速发展. 1967 年, 美籍科学家 Mandelbrot(1924 年出生于波兰华沙, 成长在法国) 在《科学》杂志上发表了"英国的海岸线有多长?"[32] 的著名论文, 拉开了分形理论与应用研究的序幕. 此后, Mandelbrot 又分别在 1977 年与 1982 年出版了著作*Fractal: Form, Chance and Dimension* 与 *The Fractal Geometry of Nature*[33],[34]. Mandelbrot 的成果得到世界科学家的高度重视, 1985 年获得具有权威性的巴纳德奖章; 在他的晚年, 又获得了世界数学大奖 —— 沃尔夫奖. 他的新思想与创造性工作开创了现代分形学.

20 世纪最后 30 年关于分形学的研究工作大都是在欧氏空间中进行的, 这也是非常自然的 [4],[5],[8],[12]~[14],[36]. 然而, 有一个方向, 却是建立在改变函数定义的"底空间"基础上的, 那就是局部域上的分形几何, 称为局部域上的分形分析, 因为它已经将分形几何学与分形分析学交融在一起, 形成包含分形几何在内的全新框架下的研究领域 [71],[73],[81].

本章建立局部域 K_p 上的分形空间. 在完备距离空间 (X,d) 的假设下叙述一些性质, 然后取 $(X,d)=(K_p,d)$, 从局部域 K_p 的特点出发对性质加以证明, 从而得到局部域上分形空间中的各种性质, 以使读者更加熟悉局部域研究的特点.

4.3.1 K_p 上的分形空间

定义 4.3.1 (分形空间) 设 (X,d) 为完备距离空间, 记

$$\mathbb{K}(X)=\{A\subset X: A \text{ 为 } X \text{ 的紧子集}\},$$

并约定 $\varnothing\notin\mathbb{K}(X)$.

(i) 对于任一点 $x\in X$ 与任一集 $B\in\mathbb{K}(X)$, 称

$$d(x,B)=\min\{d(x,y):y\in B\}$$

为点 x 到集合 B 的距离;

(ii) 对于任一对集合 $A,B\in\mathbb{K}(X)$, 记

$$d(A,B)=\max\{d(x,B):x\in A\}$$

与

$$h(A,B)=\max\{d(A,B),d(B,A)\},$$

称 $h(A,B)$ 为集合 A 与 B 的 Hausdorff 距离, 并称 $(\mathbb{K}(X),h)$ 为距离空间 X 上的分形空间(fractal space, 或 space of fractals); $(\mathbb{K}(X),h)$ 中的元称为分形(fractal).

一般地, $d(A,B)\neq d(B,A)$, 并且不难验证, $h(A,B)$ 满足距离的三个条件.

类似地, 对于完备距离空间 (X,d), 记

$$\mathbb{LK}(X)=\{A\subset X: A \text{ 为 } X \text{ 的局部紧子集}\},$$

并约定 $\varnothing\notin\mathbb{LK}(X)$.

相应地, 称 $h(A,B)=\max\{d(A,B),d(B,A)\}$ 为 $A,B\subset\mathbb{LK}(X)$ 的广义 Hausdorff 距离, 并称 $(\mathbb{LK}(X),h)$ 为距离空间 (X,d) 上的广义分形空间.

(iii) 在 $(X,d)=(K_p,d)$ 时, 称 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 为局部域 K_p 上的分形空间; 相应地, 称 $(\mathbb{LK}(K_p),h)$ 为局部域 K_p 上的广义分形空间.

例 4.3.1　在一维欧氏空间 $(\mathbb{R},d)$ 中, 距离为 $d(x,y)=|x-y|$, 则有

$$\mathbb{K}(\mathbb{R})=\{A\subset\mathbb{R}: A \text{ 为 } \mathbb{R} \text{ 的紧子集}\}.$$

$\mathbb{K}(\mathbb{R})$ 与其上的 Hausdorff 距离 $h(A,B)(A,B\in\mathbb{K}(\mathbb{R}))$ 成为 $\mathbb{R}$ 上的分形空间

$$(\mathbb{K}(\mathbb{R}),h).$$

在局部域 K_p 中, 可以取 $d(x,y)$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases} ||x|-|y||, & |x|\neq|y|, \\ |x-y|, & |x|=|y|,\ x\neq y, \\ 0, & x=y, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

其中 $|\cdot|$ 为 K_p 上的非阿基米德赋值, 易证, $d(x,y)$ 是 K_p 上的距离, 于是

$$\mathbb{K}(K_p)=\{A\subset K_p: A \text{ 为 } K_p \text{ 的紧子集}\}$$

与其上的 Hausdorff 距离 $h(A,B)$ 构成的空间

$$(\mathbb{K}(K_p),h)$$

便是局部域 K_p 上的分形空间.

我们的目的是研究局部域 (K_p,d) 上的分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$.

例 4.3.2　局部域 K_p 中的 Cantor 型集. 设 K_p 为 p 级数域, $p\geqslant 2$ 为素数. 令

$$\mathfrak{C}=D\Big\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}V_j\right)=B^0\Big\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}V_j\right), \tag{4.3.2}$$

其中

$$V_1 = B^1 \bigcup \left(2\beta^0 + B^1\right) \bigcup \cdots \bigcup \left((p-2)\,\beta^0 + B^1\right),$$

$$V_2 = \left(\beta^0 + B^2\right) \bigcup \left(\beta^0 + 2\beta^1 + B^2\right) \bigcup \cdots \bigcup \left(\beta^0 + (p-2)\,\beta^1 + B^2\right),$$

$$\cdots\cdots$$

图 4.3.1 是当 $p=5$ 时 5 级数域 K_5 中的 $D=B^0$ 的结构示意, 并由 (4.3.2) 可绘出 Cantor 型集的示意图, 阴影部分为被去除的集合 V_j.

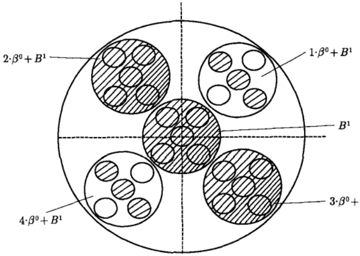


图 4.3.1

4.3.2 K_p 上分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 的完备性

定义 4.3.2 (集合 S 的膨胀) 设 (X,d) 是距离空间, $(\mathbb{K}(X),h)$ 是 X 上的分形空间,

(i) 设 $S\subset X$ 为子集, $r\geqslant 0$. 称集合

$$S+r=\{y\in X: d(x,y)\leqslant r, x\in S\}$$

为以 r 为半径的、集合 S 的膨胀(dilation).

(ii) 在局部域 K_p 上的分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 中, 设 $S\subset K_p$ 为子集, $r\geqslant 0$. 称集合

$$S+r=\{y\in X: d(x,y)\leqslant r, x\in S\} \tag{4.3.3}$$

为以 r 为半径的、局部域 K_p 的子集 S 的膨胀.

定义 4.3.3 ($\mathbb{K}(X)$ 中的 Cauchy 序列) 设 (X,d) 是距离空间,

(i) X 上的分形空间 $(\mathbb{K}(X),h)$ 中的 Cauchy 序列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{K}(X)$ 定义为: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有

$$A_n\subset A_m+\varepsilon,\quad A_m\subset A_n+\varepsilon.$$

(ii) 局部域 K_p 上的分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 中的 Cauchy 序列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{K}(K_p)$ 定义为: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有

$$A_n\subset A_m+\varepsilon,\quad A_m\subset A_n+\varepsilon, \tag{4.3.4}$$

定理 4.3.1　(1) 设 (X,d) 是完备距离空间, 则 $(\mathbb{K}(X),h)$ 是一个完备的距离空间, 并且, 若 $\{A_n\in\mathbb{K}(X)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 $(\mathbb{K}(X),h)$ 中的 Cauchy 序列, 则

$$A=\lim_{n\to+\infty}A_n\in\mathbb{K}(X)$$

可以表示为

$$A=\left\{x\in X:\exists\ \text{Cauchy 序列}\ \{x_n\in A_n\},\text{使得}\ \lim_{n\to+\infty}x_n=x\right\}.$$

(2) 局部域 (K_p,d) 上的分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 是一个完备的距离空间, 并且, 若 $\{A_n\in\mathbb{K}(K_p)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 中的 Cauchy 序列, 则

$$A=\lim_{n\to+\infty}A_n\in\mathbb{K}(K_p)$$

可以表示为

$$A=\left\{x\in K_p:\exists\ \text{Cauchy 序列}\ \{x_n\in A_n\},\text{使得}\ \lim_{n\to+\infty}x_n=x\right\}.$$

证　下面证明 (2).

① 首先验证 $h(A,B)$ 在 $\mathbb{K}(K_p)$ 上满足距离的第三个条件. 这由下述不等式

$$d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(C,B),\quad d(B,A)\leqslant d(B,C)+d(C,A)$$

与

$$\begin{aligned}h(A,B)&=\max\{d(A,B),d(B,A)\}\\&\leqslant\max\{d(A,C),d(C,B)\}+\max\{d(B,C),d(C,A)\}\\&\leqslant\max\{d(A,C),d(C,A)\}+\max\{d(B,C),d(C,B)\}\\&\leqslant h(A,C)+h(C,B)\end{aligned}$$

得到. 距离的第一、第二个条件的证明留作练习.

② 为证距离空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 的完备性, 需要两个重要性质:

1° 设 $A, B \in \mathbb{K}(K_p)$, 对于 $\varepsilon > 0$, 有

$$h(A,B) \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon \text{ 与 } B \subset A+\varepsilon.$$

2° 设 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{K}(K_p)$ 是 $\mathbb{K}(K_p)$ 中的 Cauchy 序列, $\{n_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 是 $\mathbb{N}$ 中递增子序列

$$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots.$$

若在 (K_p, d) 中存在 Cauchy 序列 $\left\{x_{n_j} \in A_{n_j}\right\}_{j=1}^{+\infty} \subset (K_p, d)$, 则存在 Cauchy 序列

$$\{\tilde{x}_n \in A_n\}_{n=1}^{+\infty},$$

使得

$$\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

首先证 1°. $h(A,B) \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon, B \subset A+\varepsilon$. 推理如下:

$$\begin{aligned} d(A,B) \leqslant \varepsilon &\Rightarrow \max\{d(a,B) : a \in A\} \leqslant \varepsilon \\ &\Rightarrow d(a,B) \leqslant \varepsilon, \quad \forall a \in A \\ &\Rightarrow a \in B+\varepsilon, \quad \forall a \in A \\ &\Rightarrow A \subset B+\varepsilon. \end{aligned}$$

反之, 由 $d(A,B) = \min\{d(a,b) : b \in B\}$, 有

$$\begin{aligned} A \subset B+\varepsilon &\Rightarrow \exists b \in B, \text{s.t. } d(a,b) \leqslant \varepsilon, \quad \forall a \in A \\ &\Rightarrow d(a,B) \leqslant \varepsilon, \quad \forall a \in A \\ &\Rightarrow d(A,B) \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

从而得到 $d(A,B) \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon$. 同理, 有

$$d(B,A) \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow B \subset A+\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} \leqslant \varepsilon \\ \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon \text{ 与 } B \subset A+\varepsilon. \end{aligned}$$

故 1° 得证.

其次证 2°. 这第二个性质是一个扩张引理, 在定理的证明中起重要作用.

事实上, 设 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{K}(K_p)$ 是 $\mathbb{K}(K_p)$ 中的 Cauchy 序列, 故由定义 4.3.3(ii), $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, s.t. $n, m > N$ 时, 有 $A_n + \varepsilon \supset A_m$, $A_m + \varepsilon \supset A_n$. 于是, 由 1° 得 $h(A_n, A_m) < \varepsilon$. 现在由 Cauchy 序列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{K}(K_p)$ 构造 (K_p, d) 中的 Cauchy 序列 $\{\tilde{x}_n \in A_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

对于 $\mathbb{K}(K_p)$ 中的 Cauchy 序列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{K}(K_p)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. $n, m > N$ 时, 有 $h(A_n, A_m) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 如此, 对应于 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{K}(K_p)$, 取 $x_n \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

现设 $\{n_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 是 $\mathbb{N}$ 中递增子序列

$$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots,$$

并设 (K_p, d) 中有 Cauchy 序列 $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty} \subset (K_p, d)$. 下面证明, 存在 Cauchy 序列 $\{\tilde{x}_n \in A_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得 $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$, $j = 1, 2, \cdots$.

事实上, 构造 $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset K_p$ 如下: 对于 $n \in \{1, 2, \cdots, n_1\}$, 选取

$$\tilde{x}_n \in \{x_n \in A_n : d(x_n, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\},$$

即 $\tilde{x}_n$ 是 A_n 中到 x_{n_1} 的最近点 (或最近点之一), 这样的最近点的存在性由 A_n 的紧性立得. 继续地, 当 $j \in \{2, 3, \cdots\}$ 时, 对于 $n \in \{n_j + 1, \cdots, n_{j+1}\}$, 选取

$$\tilde{x}_n \in \{x_n \in A_n : d(x_n, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}.$$

下证 $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足性质 2° 的要求, 即它确实是序列 $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ 在 $\{A_n\}_{j=1}^{+\infty}$ 的扩张 (extension). 事实上, 由上述构造方法知 $\tilde{x}_{n_j} = \tilde{x}_{n_j}$, 且 $\tilde{x}_n \in A_n$. 故只需证明 $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 Cauchy 序列. 由于 $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty} \subset (K_p, d)$ 与 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset (\mathbb{K}(K_p), h)$ 为 Cauchy 序列, 故

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \text{s.t. } n_k, n_j \geqslant N_1 \text{ 时, 有 } d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3};$$
$$\exists N_2 > 0, \text{s.t. } m, n \geqslant N_2 \text{ 时, 有 } d(A_m, A_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对于 $m, n \geqslant N$, 有

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leqslant d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n), \tag{4.3.5}$$

其中 $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \cdots, n_j\}$, $n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \cdots, n_k\}$.

由于 $h(A_m, A_n) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 故对于 $\tilde{x}_m \in A_m$ 与 $x_{n_j} \in \{x_{n_j}\} + \dfrac{\varepsilon}{3}$, 有 $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$; 同理 $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. 因此, 当 $m, n \geqslant N$ 时, (4.3.5) 式满足: $d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. 性质 2° 得证.

③ 对于 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 的完备性, 先简述其证明步骤: 对于集合

$$A = \{x \in K_p : \exists \text{ Cauchy 序列 } \{x_n \in A_n\}, \text{使得 } \lim_{n \to +\infty} x_n = x\},$$

其中 $\{A_n\} \subset \mathbb{K}(K_p)$ 为 Cauchy 序列, 欲证:

(a) $A \neq \varnothing$;

(b) A 是闭子集, 因此是完备子集 (因 (K_p, d) 是完备空间);

(c) 对于 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得对于 $n>N$ 有 $A\subset A_n+\varepsilon$;

(d) A 是全有界的, 因此是紧集;

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A$, 即证 $A\in(\mathbb{K}(K_p),h)$.

事实上, 为证 (a), 也只需证: 对给定的 Cauchy 序列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{K}(K_p)$, 在空间 (K_p,d) 中存在 Cauchy 序列 $\{a_j\in A_j\}$ 收敛到 $a\in A$, 即 $\lim\limits_{j\to+\infty}a_j=a$.

为此, 设正整数序列

$$N_1<N_2<\cdots<N_j<\cdots$$

使得

$$h(A_m,A_n)<\frac{1}{2^j},\quad m,n>N_j,\quad j=1,2,\cdots.$$

选取 $x_{N_1}\in A_{N_1}$, 则因 $h(A_{N_1},A_{N_2})\leqslant\frac{1}{2}$, 故存在 $x_{N_2}\in A_{N_2}$, 使得 $d(x_{N_1},x_{N_2})\leqslant\frac{1}{2}$.

归纳地, 若已选取 $x_{N_j}\in A_{N_j},j=1,2,\cdots,k$, 使得 $d\left(x_{N_{j-1}},x_{N_j}\right)\leqslant\frac{1}{2^{j-1}}$. 则因 $h\left(A_{N_k},A_{N_{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}$ 与 $x_{N_k}\in A_{N_k}$, 故存在 $x_{N_{k+1}}\in A_{N_{k+1}}$, 使得 $d\left(x_{N_k},x_{N_{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}$, 例如, 取 $x_{N_{k+1}}$ 是 x_{N_k} 到 $A_{N_{k+1}}$ 的最近点. 于是, 由归纳法, 存在无限序列 $\left\{x_{N_j}\in A_{N_j}\right\}$, 使得 $d\left(x_{N_j},x_{N_{j+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2^j},j=1,2,\cdots$.

下面只需证 $\left\{x_{N_j}\in A_{N_j}\right\}$ 是 K_p 中的 Cauchy 序列. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, 选取 $N_\varepsilon>0$, s.t.

$$\sum_{j=N_\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{2^j}<\varepsilon.$$

于是, 当 $m>n>N_\varepsilon$ 时, 有

$$\begin{aligned}d\left(x_{N_m},x_{N_n}\right)&\leqslant d\left(x_{N_m},x_{N_{m+1}}\right)+d\left(x_{N_{m+1}},x_{N_{m+2}}\right)+\cdots+d\left(x_{N_{n-1}},x_{N_n}\right)\\&\leqslant\sum_{j=N_\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{2^j}<\varepsilon.\end{aligned}$$

这样, 对于 Cauchy 序列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{K}(K_p)$ 与正递增整数列 $N_1<N_2<\cdots<N_j<\cdots$, 上述方法归纳地构造了 (K_p,d) 中的 Cauchy 序列 $\{x_{N_j}\in A_{N_j}\}\subset K_p$, 且 $\lim\limits_{j\to+\infty}x_{N_j}=x\in K_p$. 故据性质 2°, 存在 Cauchy 序列 $\{a_j\in A_j\}$, 使得 $a_{N_j}=x_{N_j}$, 其极限 $\lim\limits_{j\to+\infty}a_j$ 存在, 且据定义它属于 A. 因此 $A\neq\varnothing$.

为证 (b), 取 A 中一序列 $\{a_j\in A\}$, 它收敛到 a, $\lim\limits_{j\to+\infty}a_j=a$.

下面证明: $a\in A$. 其实, $\forall j\in\mathbb{N}$, 对 $a_j,\exists\{x_{j,n}\in A_n\}$, s.t. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{j,n}=a_j$. 于是, 存在正整数增序列 $\{N_j\}_{j=1}^{+\infty}$, s.t. $d\left(a_{N_j},a\right)<\frac{1}{j}$.

进而, 存在一个正整数的子序列 $\{m_j\}$, 使得 $d(x_{N_j,m_j}, a_{N_j}) \leqslant \frac{1}{2^j}$. 这样, $d(x_{N_j,m_j}, a) \leqslant \frac{1}{2^j}$. 令 $y_{m_j} = x_{N_j,m_j}$, 则 $y_{m_j} \in A_{m_j}$, 且 $\lim\limits_{j\to+\infty} y_{m_j} = a$. 现在由 2°, $y_{m_j} \in A_{m_j}$ 可扩张为一个 Cauchy 序列 $\{\tilde{y}_j \in A_j\}$, 且 $\lim\limits_{j\to+\infty} \tilde{y}_j = a$, 故据 A 的定义, $a \in A$, 从而 A 为闭集. (b) 得证.

为证 (c), 任取 Cauchy 序列 $\{A_n\} \subset \mathbb{K}(K_p)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. $m, n \geqslant N$ 时, 有 $h(A_m, A_n) \leqslant \varepsilon$. 于是, 对于 $n \geqslant N$, 当 $m \geqslant n$ 时, 有 $A_m \subset A_n + \varepsilon$. 下面只需证明 $A \subset A_n + \varepsilon$.

为此, 取 $a \in A$, 并推理如下:

$$
\begin{aligned}
a \in A &\Rightarrow \exists \{a_j \in A_j\}, \text{s.t.} \lim_{j\to+\infty} a_j = a \\
&\Rightarrow \text{取足够大的 } N, \text{ s.t. } m \geqslant N \text{ 蕴含 } d(a_m, a) < \varepsilon \\
&\Rightarrow m \geqslant N \text{ 蕴含 } a_m \in A_n + \varepsilon \\
&\Rightarrow m \geqslant N \text{ 蕴含 } A_m \subset A_n + \varepsilon \\
&\Rightarrow a \in A_n + \varepsilon \\
&\quad \uparrow \text{由 } A_n \text{ 的紧性, 得 } A_n + \varepsilon \text{ 为闭集} \\
&\Rightarrow \text{对足够大的 } n \text{ 蕴含 } A \subset A_n + \varepsilon \\
&\Rightarrow \text{(c) 得证.}
\end{aligned}
$$

用反证法证 (d), 若 A 不是全有界的, 则对于 Cauchy 序列 $\{A_n\} \subset \mathbb{K}(K_p)$,

$$
\begin{aligned}
&\exists \varepsilon_0 > 0, \text{ s.t. 不存在 } \varepsilon_0 \text{ 网, 即 } \exists \{x_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset A, \text{s.t. } d(x_j, x_k) \geqslant \varepsilon_0, j \neq k \\
&\Rightarrow \text{由(c)}, \exists n \in \mathbb{N} \text{足够大, s.t. } A \subset A_n + \frac{\varepsilon_0}{3} \\
&\Rightarrow \forall x_j,\ \exists y_j \in A_n, \text{ s.t. } d(x_j, y_j) \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3} \\
&\Rightarrow \text{由 } A_n \text{ 的紧性}, \{y_j\} \subset A_n \text{ 存在收敛的子序列 } \{y_{n_j}\} \subset \{y_j\} \\
&\Rightarrow \exists \{y_{n_j}\} \text{ 中的点}, y_{n_j}, y_{n_k}, \text{ s.t. } d(y_{n_j}, y_{n_k}) < \frac{\varepsilon_0}{3} \\
&\Rightarrow d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leqslant d(x_{n_j}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0 \\
&\Rightarrow \text{与反证法假设矛盾} \\
&\Rightarrow \text{(d)得证.}
\end{aligned}
$$

为证 (e), 任取 Cauchy 序列 $\{A_j\} \subset \mathbb{K}(K_p)$, 且 $\lim\limits_{j\to+\infty} A_j = A$, 证 $A \in \mathbb{K}(K_p)$. 由于 (c) 与 1°, 为证 $\lim\limits_{j\to+\infty} A_j = A$, 只需证: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. $n \geqslant N$ 时, 有 $A_n \subset A + \varepsilon$. 为此, 推理如下:

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, s.t. $m,n\geqslant N$ 时, 有 $h(A_m,A_n)\leqslant\varepsilon$

$\Rightarrow m,n\geqslant N$ 时, 有 $A_m\subset A_n+\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ 对 $n\geqslant N$, 取 $y\in A_n$

$\Rightarrow\exists\{N_j\}_{j=1}^{+\infty}$, s.t. $n<N_1<\cdots<N_j<\cdots$, 且对 $m,k\geqslant N_j$ 时, 有 $A_m\subset A_k+\dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}$; 此时, 还有 $A_n\subset A_{N_1}+\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ 由 $y\in A_n,\exists x_{N_1}\in A_{N_1}$, s.t. $d(y,x_{N_1})\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ 由 $x_{N_1}\in A_{N_1}$, $\exists x_{N_2}\in A_{N_2}$, s.t. $d(x_{N_1},x_{N_2})\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2^2}$

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow\exists x_{N_1},x_{N_2},\cdots$, s.t. $x_{N_j}\in A_{N_j}$, 且 $d\left(x_{N_j},x_{N_{j+1}}\right)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}$

$\Rightarrow d\left(y,x_{N_j}\right)\leqslant\varepsilon$, $\forall j\in\mathbb{N}$, 且 $\left\{x_{N_j}\right\}$ 是 Cauchy 序列

$\Rightarrow\left\{x_{N_j}\right\}$收敛到 $x\in A$, 且 $d\left(y,x_{N_j}\right)\leqslant\varepsilon$ 蕴含$d(y,x)\leqslant\varepsilon$

$\Rightarrow\forall n\geqslant N$ 有 $A_n\subset A+\varepsilon$

$\Rightarrow$ (e) 得证.

完成了 (a)~(e) 的证明后, 便得到 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 的完备性. 定理 4.3.1 得证.

完备距离空间 (X,d) 上的分形空间 $(\mathbb{K}(X),h)$ 中, 还有几个常用的距离关系:

定理 4.3.2 设 (X,d) 是完备距离空间, 对于 $A,B\in\mathbb{K}(X)$, 有

(1) 存在 $x\in A$, $y\in B$, 使得 $h(A,B)=d(x,y)$;

(2) 若 $B\subset A\subset X$, $x\in X$, 则 $d(x,B)\geqslant d(x,A)$;

(3) 对于 A, $B\in\mathbb{K}(X)$, 一般地, 有 $d(A,B)\neq d(B,A)$;

(4) 对于 A, B, $C\in\mathbb{K}(X)$, 有 $d(A\cup B,C)=\max\{d(A,C),d(B,C)\}$;

(5) 对于 A, B, C, $D\in\mathbb{K}(X)$, 有

$$h\left(A\bigcup B,C\bigcup D\right)\leqslant\max\left\{h(A,C),h(B,D)\right\}.$$

这个定理将距离 $h(A,B)$ 的性质显示出来, 对以后的应用很重要.

4.3.3 K_p 中几种常用的变换

定义 4.3.4 (变换) 设 (X,d) 为距离空间,

(i) X 到 X 的映射 $f:X\to X$ 称为 X 到 X 的一个变换, 若对于每个 $x\in X$, 有唯一的 $y=f(x)\in X$ 与之对应;

变换 $f:X\to X$ 称为一对一的, 若 $x,y\in X$, $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$;

集合 $f(S)=\{f(x)\in X:x\in S\}$ 称为集 $S\subset X$ 在变换 $f:X\to X$ 下的像集;

若变换 $f:X\to X$ 满足 $f(X)=X$, 则称变换 f 是映上的;

若变换 $f:X\to X$ 是一对一、映上的, 则称变换 f 是可逆的, 并记其逆变换为 $f^{-1}:X\to X$.

(ii) 在局部域 (K_p,d) 情形, 变换、一对一变换、变换的像集、映上变换、可逆变换都类似 (i) 中的定义.

下面列出欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的常用变换, 便于进行比较.

1. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C})$ 中常用的变换

(1) $\mathbb{R}$ 情形

(a) 多项式变换 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N,$$

这里系数 $a_j\in\mathbb{R},\ j=0,1,2,\cdots,N,\ N\in\mathbb{P}$ 为任一确定的非负整数, $a_N\neq 0$, 则 f 称为 $\mathbb{R}$ 上的 N 次多项式.

(b) 仿射变换 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=ax+b,$$

这里 $a,b\in\mathbb{R}$. 当 $a=1$ 时, $f(x)=x+b$ 称为平移变换; 当 $b=0$ 时, $f(x)=ax$ 称为线性变换.

(c) 线性分式变换 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\quad ad\neq bc,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

线性分式变换也称为 Möbius 变换.

约定: 若 $c\neq 0$, 则 $f(x)|_{x=-\frac{d}{c}}=\infty$; 若 $c=0$, 则 $f(x)|_{x\to\infty}=\infty$.

(2) $\mathbb{R}^2$ 情形

二维仿射变换 $w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$w(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e\\ f\end{bmatrix}=Ax+t,$$

这里

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathfrak{M}_{2\times 2},\quad x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix},t=\begin{bmatrix} e\\ f\end{bmatrix}\in\mathfrak{M}_{2\times 1}$$

为矩阵, $\mathfrak{M}_{2\times 2}$ 与 $\mathfrak{M}_{2\times 1}$ 分别为 2×2 矩阵空间与 2×1 矩阵空间.

二维仿射变换有明显的几何意义: 设 $(a,c),(b,d)\in\mathbb{R}^2$ 有极坐标表示

$$\begin{cases} a=r_1\cos\theta_1,\\ b=r_2\cos\left(\theta_2+\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}\qquad \begin{cases} c=r_1\sin\theta_1,\\ d=r_2\sin\left(\theta_2+\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}$$

则矩阵 A 成为

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\cos\theta_1 & -r_2\sin\theta_2\\ r_1\sin\theta_1 & r_2\cos\theta_2\end{bmatrix}.$$

因此, 二维仿射变换将 x_1 轴、x_2 轴分别旋转 θ_1 角、θ_2 角, 然后平移到位置 t.

二维仿射变换也称为二维相似变换.

约定: 若 $r_1=r_2=1$, $\theta_1=\theta_2=\theta$, 即

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

或者 $r_1=r_2=1$, $\theta_1=\theta_2+\pi$, 亦即

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix},$$

称为**正交变换**, 此时 $|A|=\pm1$.

正交变换也称为**旋转变换**, 它保持向量的长度不变; 后一矩阵当 $\theta=0$ 时, 即 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 称为**反射变换**.

(3) $\mathbb{C}$ 情形 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

(a) Riemann 面上的 Möbius 变换

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad\neq bc,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}$$

也有与实情形的类似约定.

(b) Riemann 面上的**解析变换**

对于 $\mathbb{C}$ 上的变换

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad\neq bc,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C},$$

若每个元 $z_0\in\mathbb{C}$ 存在相似变换

$$w(z)=az+b,\quad a,b\in\mathbb{C},$$

这里 $a=a(z_0)$, $b=b(z_0)$, 使得

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d(f(z),w(z))}{d(z,z_0)}=0,$$

则称 f 为 $\mathbb{C}$ 上的**解析变换**.

2. 距离空间 (X,d) 中的变换集

设 (X,d) 为距离空间, 集合

$$\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}(X)=\{f:f\text{ 是 }X\text{ 到 }X\text{ 的变换}\}$$

称 $\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}(X)$ 为**距离空间 (X,d) 上的变换集**, 简称变换集.

在变换集 $\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}(X)$ 中引进运算, 两个变换的复合 $\circ$ 如下:

$$f,g\in\mathbb{F}\Rightarrow f\circ g(x)=f(g(x)),\ x\in X;$$

恒同变换 $I : x \to I(x) = x$ 是单位元, 使得变换集 $\mathbb{F}$ 成为一个半群 $(\mathbb{F}, \circ)$.

半群 $(\mathbb{F}, \circ)$ 的子群

$$\tilde{\mathbb{F}} \equiv \left\{ f \in \mathbb{F}(X) : f \text{ 存在逆变换 } f^{-1} \right\}$$

在复合运算下成为一个群 $(\tilde{\mathbb{F}}, \circ)$.

在变换半群 $(\mathbb{F}, \circ)$ 与变换群 $(\tilde{\mathbb{F}}, \circ)$ 中, 有三种重要的变换: 迭代、压缩与迭代函数系.

首先讨论迭代 (变换).

定义 4.3.5 (前 n 迭代、后 n 迭代)　设 $f \in \mathbb{F}$, 用记号

$$f^{0n} : X \to X, \quad n \in \mathbb{P}$$

表示变换: 对于任意 $x \in X$,

$$\begin{aligned} &f^{00}(x) = x, \\ &f^{01}(x) = f(x), \\ &\qquad \cdots\cdots \\ &f^{0n}(x) = f \circ f^{0n-1}(x) = f\left(f^{0n-1}(x)\right), \end{aligned}$$

则称变换 $f^{0n} : X \to X$ 为距离空间 X 上 f 的前 n 迭代.

若变换 $f \in \tilde{\mathbb{F}}$, 则称变换

$$f^{0-n} : X \to X, \quad n \in \mathbb{P}$$

为 f 的后 n 迭代, 具体表示为: 对于任意 $x \in X$,

$$\begin{aligned} &f^{0-1}(x) = f^{-1}(x), \\ &f^{0-2}(x) = \left(f^{02}\right)^{-1}(x), \\ &\qquad \cdots\cdots \\ &f^{0-n}(x) = \left(f^{0n}\right)^{-1}(x). \end{aligned}$$

定理 4.3.3　距离空间 (X, d) 中的变换 $f \in \mathbb{F}$ 的前 n 迭代满足

$$f^{0m} \circ f^{0n} = f^{0(m+n)}, \quad m, n \in \mathbb{P}.$$

例 4.3.3　设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, 求其前 n 迭代.

解　由定义

$$f^{00}(x) = x, f^{01}(x) = 2x, f^{02}(x) = 2^2 x, \cdots, f^{0n}(x) = 2^n x, \cdots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

例 4.3.4 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2)=(2x_1,x_2^2+x_1)$, 求其前 2 迭代.

解 由定义

$$\begin{aligned}f^{00}(x_1,x_2)&=(x_1,x_2),\\f^{01}(x_1,x_2)&=\left(2x_1,x_2^2+x_1\right),\\f^{02}(x_1,x_2)&=\left(4x_1,\left(x_2^2+x_1\right)^2+2x_1\right).\end{aligned}$$

例 4.3.5 对于几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}ba^n=b+ba+ba^2+ba^3+\cdots$, $0<a<1$, $b>0$, 令 $I_0=[0,b]$, 作 $f(x)=ax+b$, 求 I_0 关于 f 的前 n 迭代.

解 前 n 迭代如下:

$$\begin{aligned}f^{00}(I_0)&=I_0,\\f^{01}(I_0)&=f(I_0)=I_1=[b,ab+b],\\&\cdots\cdots\\f^{0n}(I_0)&=I_n,\end{aligned}$$

这里区间 I_n 的左端点与右端点恰好分别为几何级数的部分和

$$I_n=[s_{n-1},s_n],\quad n\in\mathbb{N},$$

其中

$$s_0=b,\quad s_n=\sum_{k=0}^{n}ba^k,\quad n\in\mathbb{N}.$$

若令

$$I=\bigcup_{n=0}^{+\infty}I_n,$$

则

$$f(I)=\left[b,\frac{b}{1-a}\right)=I-I_0.$$

下面研究压缩映射 (变换).

定义 4.3.6 (压缩映射) 在距离空间 (X,d) 中, 称变换 $f:X\to X$ 是 X 到 X 的压缩映射, 若存在常数 s, $0<s<1$, 使得

$$d(f(x),f(y))\leqslant sd(x,y),\quad x,y\in X;$$

这里 s 称为压缩因子.

相应地, 局部域 (K_p,d) 中的压缩映射, 只需取 $(X,d)=(K_p,d)$, 便可类似定义.

定理 4.3.4　设 $w: X \to X$ 是距离空间 (X,d) 上的映射,

(1) 若 w 是连续映射, 则 w 映 (X,d) 到 (X,d) 自身;

(2) 若 w 是压缩映射, 则 w 是连续映射;

(3) 若 w 是压缩映射, $0 < s < 1$, 则 w 定义一个映射 $w: \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$ 为

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\}, \quad \forall B \in \mathbb{K}(X),$$

此 w 是 $(\mathbb{K}(X), h)$ 上的具有压缩因子 s 的压缩映射;

(4) 若 $(\{w_n\}_{n=1}^{N}, s_n : n = 1, \cdots, N)$ 是 $(\mathbb{K}(X), h)$ 上的压缩映射集, 定义映射 $W: \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$ 为

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), \quad \forall B \in \mathbb{K}(X),$$

则此 W 是 $(\mathbb{K}(X), h)$ 上的具有压缩因子 $s = \max\{s_n : 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 的压缩映射.

证明留作习题.

显然, 压缩映射是连续映射. 为了研究压缩映射, 要用到完备距离空间中连续映射的性质, 现将其列出, 以备参考.

定理 4.3.5　设 (X_1, d_1), (X_2, d_2) 为两个完备距离空间, $f: X_1 \to X_2$ 为连续映射,

(1) 若序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X_1$ 收敛到 $x \in X_1$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x);$$

(2) $\forall E \in \mathbb{K}(X_1)$ 为紧集, 故 $f: E \to X_2$ 是一致连续的, 即对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意 $x, y \in E$, 当 $d_1(x,y) < \delta$ 时, 有 $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$;

(3) 若 (X_1, d_1), (X_2, d_2) 为两个完备紧距离空间, 且 $f: X_1 \to X_2$ 是连续的、一对一的、映上的, 则 f 是 X_1 到 X_2 的同胚映射;

(4) 若记乘积空间为 $(X,d) = (X_1 \times X_2, \max(d_1, d_2))$, 且 $E_1 \in \mathbb{K}(X_1)$, $E_2 \in \mathbb{K}(X_2)$, 则 $E_1 \times E_2 \in \mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X_1 \times X_2)$;

(5) 若 (X_3, d_3) 也是完备距离空间, $f: X_1 \times X_2 \to X_3$ 满足下述条件:

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得 $d_1(x_1, y_1) < \delta$ 蕴含 $d_3(f(x_1,x_2), f(y_1,y_2)) < \varepsilon$,

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得 $d_2(x_2, y_2) < \delta$ 蕴含 $d_3(f(x_1,x_2), f(y_1,y_2)) < \varepsilon$,

则映射 $f: X_1 \times X_2 \to X_3$ 在距离空间 $(X_3, d_3) = (X_1 \times X_2, d_3)$ 上是连续映射, 其中

$$d_3(x,y) = d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}.$$

定义 4.3.7 (压缩映射的不动点)　设 (X,d) 是完备距离空间, 对于变换 $f: X \to X$, 若存在 $x_f \in X$, 使得 $f(x_f) = x_f$, 则称 x_f 为变换 f 的不动点.

压缩映射具有如下重要性质:

定理 4.3.6 设 $f:X\to X$ 是完备距离空间 (X,d) 中的具有压缩因子 s 的压缩映射, 则

(1) f 是将 $\mathbb{K}(X)$ 映射到 $\mathbb{K}(X)$ 自身的具有压缩因子 s 的压缩映射, 且映射 $f:\mathbb{K}(X)\to\mathbb{K}(X)$ 由

$$f(B)=\{f(x):x\in B\},\quad B\in\mathbb{K}(X)$$

确定;

(2) 存在 f 的唯一的不动点 $x_f\in X$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} f^{0n}(x)=x_f,\quad x\in X.$$

证 存在性证明主要利用不等式

$$d\left(f^{0n}(x),f^{0m}(x)\right)\leqslant s^{m\wedge n}d\left(0,f^{0|m-n|}(x)\right),\quad m,n\in\mathbb{P},$$

其中 $m\wedge n=\min(m,n)$, 以及估计式

$$\begin{aligned}d\left(x,f^{0k}(x)\right)&\leqslant d\left(x,f^{01}(x)\right)+d\left(f^{01}(x),f^{02}(x)\right)+\cdots+d\left(f^{0(k-1)}(x),f^{0k}(x)\right)\\&\leqslant\left(1+s+s^2+\cdots+s^{k-1}\right)d\left(x,(x)\right)\leqslant\frac{1}{1-s}d\left(x,f(x)\right),\end{aligned}$$

从而

$$d\left(f^{0m}(x),f^{0n}(x)\right)\leqslant s^{m\wedge n}\frac{1}{1-s}d\left(x,f(x)\right),$$

由此, $\left\{f^{0n}(x)\right\}_{n=0}^{+\infty}\subset X$ 是 X 中的 Cauchy 序列, 由 X 的完备性可知, 不动点 x_f 存在, 并且由压缩映射的连续性, 有

$$f(x_f)=f\left(\lim_{n\to+\infty}f^{0n}(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}f^{0(n+1)}(x)=x_f.$$

唯一性的证明由公式

$$d(x_f,y_f)=d\left(f(x_f),f(y_f)\right)\leqslant sd(x_f,y_f)$$

以及 $0<s<1$ 得到.

迭代函数系在近代数学的各个分支中都有重要应用.

定义 4.3.8 (迭代函数系) 设 $w_n:X\to X$ 为完备距离空间 (X,d) 上的压缩因子分别为 $s_n(n=1,2,\cdots,N)$ 的 N 个压缩映射, 称 $\{w_n:X\to X\}_{n=1}^{N}$ 为 (X,d)

上的一个迭代函数系, 简记为 IFS, 并称 $s=\max\{s_n:1\leqslant n\leqslant N\}$ 为此迭代函数系的压缩因子.

对于一集合 $B\in\mathbb{K}(X)$, 记诸像集 $w_n(B)$ 的并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{N}w_n(B)$ 为

$$w(B)\equiv\bigcup_{n=1}^{N}w_n(B).$$

由 $\mathbb{K}(X)$ 中集合的紧性与 w_n 的连续性, 得到 $w(B)\in\mathbb{K}(X)$, 并且变换 $w:X\to X$ 是具有压缩因子 s 的压缩映射. 因此, w 有唯一的"不动点" $A\in\mathbb{K}(X)$, 满足

$$A=w(A)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A), \tag{4.3.6}$$

并且由

$$A=\lim_{n\to+\infty}w^{0n}(B),\quad B\in\mathbb{K}(X)$$

确定.

定义 4.3.9 (迭代函数系的吸引子)　称 (4.3.6) 中的不动点 A 为迭代函数系

$$\{w_n:X\to X\}_{n=1}^{N}$$

的吸引子.

例 4.3.6　取 $X=\mathbb{R}$, $\{w_1,w_2\}$ 为

$$w_1=\frac{1}{3}x,\quad w_2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3},$$

则 $w(B)=w_1(B)\bigcup w_2(B), B\in\mathbb{K}(\mathbb{R}), w$ 是具有压缩因子 $s=\dfrac{1}{3}$ 的压缩映射.

若取 $B=[0,1]$, 则

$$B^{0n}=w^{0n}(B),\quad n\in\mathbb{N}$$

便是 Cantor 三分集构造中的第 n 次取出的区间.

不难证明, $\lim\limits_{n\to+\infty}w^{0n}(B)=A$ 就是经典的 Cantor 三分集, 并且有

$$A=\left(\frac{1}{3}A\right)\bigcup\left(\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}\right),$$

其中 $\alpha A=\{\alpha x:\alpha\in\mathbb{R},x\in A\}$, $A+\beta=\{x+\beta:x\in A,\beta\in\mathbb{R}\}$.

迭代函数系有如下重要性质:

定理 4.3.7　设 $w_n:X\to X$ 为完备距离空间 (X,d) 上的压缩因子分别为 s_n, $n=1,2,\cdots,N$ 的 N 个压缩映射, 则迭代函数系 $\{w_n,s_n\}_{n=1}^{N}$ 决定的压缩映射

$$w(B)\equiv\bigcup_{n=1}^{N}w_n(B),\quad B\in\mathbb{K}(X)$$

满足 $h(w(B),w(C)) \leqslant sh(B,C)$, $0 \leqslant s < 1$, $B,C \in \mathbb{K}(X)$, 且 w 有唯一的不动点 $A \in \mathbb{K}(X)$, 满足

$$A = w(A) \equiv \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A),$$

对任一 $B \in \mathbb{K}(X)$, 由

$$A = \lim_{n\to+\infty} w^{0n}(B)$$

确定. $A \in \mathbb{K}(X)$ 便是 w 的吸引子.

有一种特殊的压缩映射, 称为凝聚变换.

定义 4.3.10 (凝聚变换、凝聚集) 设 (X,d) 为距离空间, 集合 $C \in \mathbb{K}(X)$, 定义变换为

$$w_0(B) = C, \quad \forall B \in \mathbb{K}(X),$$

则称 $w_0 : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$ 为凝聚变换(condensation), 称集合 $C \in \mathbb{K}(X)$ 为凝聚集. 显然, 凝聚变换是具有压缩因子 $s = 0$ 的压缩映射.

设 $\{\{w_n\}_{n=1}^{N}, 0 \leqslant s_n < 1, n = 1,\cdots,N\}$ 为 (X,d) 上的 IFS, 并设 w_0 为凝聚变换, 称 $\{\{w_n\}_{n=0}^{N}, 0 \leqslant s_n < 1, n = 0,1,\cdots,N\}$ 为带有凝聚变换的压缩因子为 s 的双曲 IFS, 其压缩因子为 $\max\{s_n : 0 \leqslant s_n < 1, n = 0,1,\cdots,N\}$.

定理 4.3.8 设 $\{\{w_n\}_{n=0}^{N}, 0 \leqslant s_n < 1, n = 0,1,\cdots,N\}$ 为距离空间 (X,d) 上的、压缩因子分别为 $s_n (n = 0,1,\cdots,N)$ 的带有凝聚变换的 IFS, 则迭代函数系 $(\{w_n\}, s)$ 决定的映射 $W : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$,

$$W(B) \equiv \bigcup_{n=0}^{N} w_n(B), \quad \forall B \in \mathbb{K}(X)$$

是完备距离空间 $(\mathbb{K}(X), h)$ 上的压缩映射, 吸引子为 s, 满足

$$h(W(B), W(C)) \leqslant sh(B,C), \quad 0 \leqslant s < 1, \quad B,C \in \mathbb{K}(X),$$

且 W 有唯一的不动点 $A \in \mathbb{K}(X)$.

拼图方法是寻求 IFS 的吸引子的依据.

定义 4.3.11(IFS 的拼图) 设 $L \in \mathbb{K}(X)$ 为分形空间中一个给定的紧集, $\{w_n, s_n\}_{n=1}^{N}$ 为完备距离空间 (X,d) 上的迭代函数系. 若 $\varepsilon > 0$, 都有

$$h\left(L, \bigcup_{n=1}^{N} w_n(L)\right) \leqslant \varepsilon,$$

则称 L 为迭代函数系 $\{w_n, s_n\}_{n=1}^{N}$ 的一个拼图.

定理 4.3.9　设 (X,d) 为完备距离空间, $L\in\mathbb{K}(X)$ 为分形空间中一个给定的紧集, $\{w_n,s_n\}_{n=1}^N$ 为 (X,d) 上的迭代函数系. 若 $L\in\mathbb{K}(X)$ 是 $\{w_n,s_n\}_{n=1}^N$ 的一个拼图, 则

$$h(L,A)\leqslant\frac{\varepsilon}{1-s},$$

这里 $A\in\mathbb{K}(X)$ 是 $\{w_n,s_n\}_{n=1}^N$ 的吸引子, 或等价地, 有

$$h(L,A)\leqslant\frac{1}{1-s}h\left(L,\bigcup_{n=1}^{N}w_n(L)\right).$$

证　拼图定理的证明分四步:

① 若 $f:X\to X$ 是压缩因子为 s 的压缩映射, 且 $x_f\in X$ 是其不动点, 则

$$d(x,x_f)\leqslant\frac{1}{1-s}d(x,f(x)),\quad\forall x\in X.$$

事实上, 由距离 d 的连续性, 可推导如下:

$$\begin{aligned}d(x,x_f)&\leqslant d\left(x,\lim_{n\to+\infty}f^{0n}(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}d\left(x,f^{0n}(x)\right)\\&\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=1}^{n}d\left(f^{0m-1},f^{0m}(x)\right)\\&\leqslant\lim_{n\to+\infty}d(x,f(x))\left\{1+s+\cdots+s^{n-1}\right\}\\&\leqslant\frac{1}{1-s}d(x,f(x)).\end{aligned}$$

② 设 (P,d_P) 是距离空间, 若 $w:P\times X\to X$ 是 X 上具有压缩因子 s 的压缩映射族, 即 $\forall p\in P$, $w(p,x)$ 是 X 上的压缩映射; 假设对于每个固定的 $x\in X$, 映射 w 关于 $p\in P$ 连续. 则 $w(p,x)$ 的不动点 x_w 连续依赖于 p, 即 $x_w:P\to X$ 连续.

事实上, 对于 $w(p,x)$ 的不动点 $x_w(p)$, $p\in P$, 可推导如下: $\forall\varepsilon>0,\forall q\in P$, 有

$$\begin{aligned}d(x_w(p),x_w(q))&=d(w(p,x_w(p)),w(q,x_w(q)))\\&\leqslant d(w(p,x_w(p)),w(q,x_w(p)))+d(w(q,x_w(p)),w(q,x_w(q)))\\&\leqslant d(w(p,x_w(p)),w(q,x_w(p)))+sd(x_w(p),x_w(q)).\end{aligned}$$

于是

$$d(x_w(p),x_w(q))\leqslant\frac{1}{1-s}d(w(p,x_w(p)),w(q,x_w(q))).$$

上式右边当 $d_P(p,q)\to 0$ 时, 由明显的不等式

$$d(w(p,x),w(q,x))\leqslant cd_P(p,q),\quad\forall p,q\in P,\ x\in X$$

与

$$d\left(x_w\left(p\right),x_w\left(q\right)\right)\leqslant\frac{c}{1-s}d_P\left(p,q\right),$$

便得到 $x_w:P\to X$ 的连续性.

③ 设 $w_n:\mathbb{N}\times X\to X$ 是连续依赖于 $n\in\mathbb{N}$ 的 $x\in X$ 的连续映射 (即取②中 P 为有限集 $P=\{1,\cdots,N\},N\in\mathbb{N}$), 视 $\{P=\{1,\cdots,N\},d_P\}$ 为紧距离空间. 则定义为

$$W\left(p,B\right)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n\left(p,B\right),\quad\forall B\in\mathbb{K}\left(X\right)$$

的映射 $W:\mathbb{K}\left(X\right)\to\mathbb{K}\left(X\right)$ 也是 $p\in P$ 的连续映射, 即 $W\left(p,B\right)$ 对于距离空间 $\left(\mathbb{K}\left(X\right),h\right)$ 中的每个 $B\in\mathbb{K}\left(X\right)$ 而言, 都是 $p\in P$ 的连续映射.

只需对于 $N=1$ 证明③. 事实上, 对于 $\forall B\in\mathbb{K}\left(X\right)$, 任取 $p,q\in P$, 且 $\forall\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}d\left(w_1\left(p,B\right),w_1\left(q,B\right)\right)&=\max_{x\in B}\ \min_{y\in B}d\left(w_1\left(p,x\right),w_1\left(q,y\right)\right)\\&\leqslant\max_{x\in B}\ \min_{y\in B}\left\{d\left(w_1\left(p,x\right),w_1\left(p,y\right)\right)+d\left(w_1\left(p,y\right),w_1\left(q,y\right)\right)\right\}.\end{aligned}$$

由 $P\times B$ 是紧集, 且 $w_1:P\times B\to X$ 是连续映射, 故 w_1 是一致连续的, 从而, $\forall_{\varepsilon>0},\exists_{\delta>0}$, 当 $d_P\left(p,q\right)<\delta$ 时, 有

$$d\left(w_1\left(p,x\right),w_1\left(q,y\right)\right)<\varepsilon,\quad\forall y\in B.$$

于是, 假设 $d_P\left(p,q\right)<\delta$, 则

$$\begin{aligned}d\left(w_1\left(p,B\right),w_1\left(q,B\right)\right)&<\max_{x\in B}\ \min_{y\in B}\left\{d\left(w_1\left(p,x\right),w_1\left(p,y\right)\right)+\varepsilon\right\}\\&\leqslant d\left(w_1\left(p,B\right),w_1\left(p,B\right)\right)+\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

类似地, 当 $d_P\left(p,q\right)<\delta$ 时, 有

$$d\left(w_1\left(q,B\right),w_1\left(p,B\right)\right)<\varepsilon.$$

因此, 对于 $d_P\left(p,q\right)<\delta$, 有

$$h\left(w_1\left(p,B\right),w_1\left(q,B\right)\right)<\varepsilon.$$

④ 设 $\{\{w_n\}_{n=1}^{N},0\leqslant s_n<1,n=1,\cdots,N\}$ 为 (X,d) 上的 IFS, 且 w_n 连续依赖于参数 $n\in P$, 这里 P 为一个紧距离空间. 则吸引子 $A\left(p\right)\in\mathbb{K}\left(X\right)$ 关于 Hausdorff 距离 h 连续依赖于 $p\in P$.

从而拼图定理得以证明.

上述性质描述了吸引子对于参数的连续依赖性. 在实际应用中, 用控制参数的方法, 可以控制吸引子的连续变化.

将以上结果用于局部域 (K_p, d) 以及其上的分形空间 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 都是适宜的. 例如迭代、压缩、IFS、拼图、分形测度、代码空间等等. 分形空间 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 中自相似集的研究还可参考文献 [105], [114]~[120]. 分形插值的工作也是刚刚起步 (欧氏空间的分形插值可参考文献 [3], [49]).

思 考 题

1. 试证: $h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$ 满足距离的三条公理.
2. 试证: (4.3.1) 中定义的 $d(x,y) = |x-y|$ 是局部域 K_p 上的距离, 使得 (K_p, d) 成为完备的距离空间, 并且 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 成为局部域 K_p 上的完备分形空间.
3. 试证: 实变函数中的 Cantor 三分集属于分形空间 $(\mathbb{K}(\mathbb{R}), d)$.
4. 设 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 为局部域 K_p 上的分形空间, 试证: 定理 4.3.4 与定理 4.3.5.
5. 设 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 为局部域上的分形空间, 试证定理 4.3.7 与定理 4.3.8.

第 5 章　局部域 K_p 上的分形分析

5.1　局部域 K_p 上的分形维数

基于局部域为底空间的分形研究虽然才刚刚起步, 但所获结果表明, 这个新领域是大有作为的. 本章从局部域上分形研究的基本知识开始, 介绍该领域的最新成果, 同时介绍有意义的开问题.

本章中, 设 K_p 为局部域, $p \geqslant 2$ 为素数, 这里 K_p 是指 p 级数域 S_p 与 p 进数域 A_p. 本章的参考文献为 [30], [36], [40]~[46], [86], [114]~[120].

5.1.1　Hausdorff 测度与维数

1. Hausdorff 测度

对于集合 $E \subset K_p$, 称

$$|E|_d = \sup\{|x-y|:\ x, y \in E\}$$

为集合 E 的直径, 其中 $|x-y|$ 是作为距离空间的 (K_p, d) 中的超距 (ultra-metric) $d(x,y)=|x-y|$, 由式 (1.2.8) 给出.

对于 $E \subset K_p$ 与整数 $n \in \mathbb{Z}$, 称集族 $\{U_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 为 E 的 n 覆盖, 若 $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} U_j$, 其中 $\forall U_j \subset K_p$ 为开集, 且直径 $|U_j|_d \leqslant p^{-n}$.

定义 5.1.1 (s 维 Hausdorff 测度)　对于 $s \geqslant 0$ 与 $n \in \mathbb{Z}$, 称

$$H_n^s(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{+\infty} |U_j|_d^s : \bigcup_j U_j \supset E \text{ 为 } E \text{ 的 } n \text{ 覆盖}\right\}$$

为 E 的近似 s 维 Hausdorff 测度, 当 $n \to +\infty$ 时, 上述极限显然存在,

$$\lim_{n\to+\infty} H_n^s(E) = H^s(E),$$

称 $H^s(E)$ 为 E 的 s 维 Hausdorff 测度.

类似于欧氏空间情形, 有

定理 5.1.1　$H_n^s(E)$ 与 $H^s(E)$ 是外测度, 并且 $H^s(E)$ 是超距外测度.

证明由 $d(x,y)=|x-y|$ 为 K_p 上的超距而得到.

定理 5.1.2　$H^s(E)$ 具有平移与伸缩不变性: 对于 $\lambda \in K_p$, 有

(1) $H^s(E+\lambda)=H^s(E)$, 其中 $E+\lambda=\{x+\lambda:\ x\in E\}$;

(2) $H^s(\lambda E)=|\lambda|^s H^s(E)$, 其中 $\lambda E=\{\lambda x:\ x\in E\}$.

证　证 (1). 设 $\{U_j\}$ 为 E 的 n 覆盖, 则 $\{U_j+\lambda\}$ 是 $E+\lambda$ 的 n 覆盖, 于是, $H_n^s(E+\lambda)\leqslant H_n^s(E)$. 从而得

$$H^s(E+\lambda)\leqslant H^s(E). \tag{5.1.1}$$

另一方面, 在 (5.1.1) 中取 $\lambda=-\mu\in K_p$, 得 $H^s(E-\mu)\leqslant H^s(E)$. 于是 $H^s((E+\mu)-\mu)\leqslant H^s(E+\mu)$ 蕴含 $H^s(E)\leqslant H^s(E+\mu)$. 由 λ,μ 的任意性, 故 (1) 得证.

性质 (2) 的证明由 $|\lambda U|_d=|\lambda|\sup\{|x-y|:\ x,y\in U\}$ 得到.

2. Hausdorff 维数

注意到 s 维 Hausdorff 测度 $H^s(E)$ 的下述性质:

引理 5.1.1　设 $E\subset K_p$ 是非空 Borel 集, 若存在 $s_0\in(0,+\infty)$, 使得 $H^{s_0}(E)<+\infty$, 则对所有 $s>s_0$, 都有 $H^s(E)=0$; 若存在 $s_1\in(0,+\infty)$, 使得 $H^{s_1}(E)>0$, 则对所有 $s<s_1$, 都有 $H^s(E)=+\infty$. 如图 5.1.1 所示.

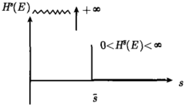


图 5.1.1

于是, 对任一 $E\subset K_p$, 必存在非负实数 $0\leqslant\bar{s}\equiv D_H(E)<+\infty$, 使得

$$\text{当 } 0\leqslant s<\bar{s}\equiv D_H(E)<+\infty \text{ 时, 有 } H^s(E)=+\infty;$$

$$\text{当 } 0\leqslant D_H(E)\equiv\bar{s}<s<+\infty \text{ 时, 有 } H^s(E)=0.$$

对于 $0\leqslant s<t<+\infty$, 有

$$H^s(E)<+\infty\Rightarrow H^t(E)=0,$$
$$H^t(E)>0\Rightarrow H^s(E)=+\infty,$$

故可以定义 Hausdorff 维数.

定义 5.1.2 (Hausdorff 维数)　集合 $E\subset K_p$ 的 Hausdorff 维数定义为

$$\begin{aligned}\dim_H E &= \sup\{s:\ H^s(E)>0\} = \sup\{s:\ H^s(E)=+\infty\}\\ &= \inf\{t:\ H^s(E)<+\infty\} = \inf\left\{t:\ H^t(E)=0\right\}.\end{aligned}$$

下述定理是 Hausdorff 维数的重要性质.

定理 5.1.3 Hausdorff 维数 $\dim_H E$ 具有下述性质:

(1) (单调性) $E_1\subset E_2 \Rightarrow \dim_H E_1 \leqslant \dim_H E_2$;

(2) (可数稳定性) $\dim_H\left(\bigcup\limits_{k\geqslant 1} E_k\right) = \sup\limits_{k\geqslant 1}\{\dim_H E_k\}$;

(3) $E\subset K_p \Rightarrow 0\leqslant \dim_H E\leqslant 1$;

(4) $\dim_H E = \sup\{\dim_H F:\ F\subset E,\ F\in\mathbb{K}(K_p)\}$;

(5) 若 $E\subset K_p$ 的 Haar 测度 $|E|>0$, 则 $\dim_H E=1$;

(6) 若 $E\subset K_p$ 是可数集, 则 $\dim_H E=0$.

证明留作练习.

3. Hausdorff 网测度

Hausdorff 网测度 $H^s_{\mathfrak{F}}(E)$ 的引入对研究局部域分形很起作用.

定义 5.1.3 (K_p 中的网) 设 $\mathfrak{F}=\{A\subset K_p\}$ 为 K_p 的子集族, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in K_p$, $\exists A\in\mathfrak{F}$, s.t. $x\in A$, 且 $|A|_d\leqslant\varepsilon$, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 K_p 中的一个网. 记 K_p 中所有网所成的集为

$$\mathfrak{M}=\left\{\mathfrak{F}=\{A\subset K_p\}\text{ 为 }K_p\text{ 中的网}\right\}.$$

又记 K_p 中子集的全体为

$$2^{K_p}=\left\{A\subset K_p:\ A\text{ 是 }K_p\text{ 的子集}\right\}.$$

定义 5.1.4 (s 维 Hausdorff 网测度) 对于 $s\geqslant 0$, $\forall E\in 2^{K_p}$, 称

$$H^s_{\mathfrak{F}}(E)=\lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\sum_{j=1}^{+\infty}|U_j|_d^s:\ E\subset\bigcup_j U_j, U_j\in\mathfrak{F}, |U_j|_d\leqslant p^{-n}\right\}$$

为集合 E 在网 $\mathfrak{F}$ 上的 s 维 Hausdorff 网测度.

对于 $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2\in\mathfrak{M}$, 若存在常数 $c_1,\ c_2>0$, 使得 $\forall E\in 2^{K_p}$, $\forall s\geqslant 0$, 都有

$$c_1H^s_{\mathfrak{F}_1}(E)\leqslant H^s_{\mathfrak{F}_2}(E)\leqslant c_2H^s_{\mathfrak{F}_1}(E),$$

则称网 $\mathfrak{F}_1$ 与 $\mathfrak{F}_2$ 彼此等价, 记为 $\mathfrak{F}_1\approx\mathfrak{F}_2$; 并称 s 维 Hausdorff 网测度 $H^s_{\mathfrak{F}_1}(E)$ 与 $H^s_{\mathfrak{F}_2}(E)$ 彼此等价, 记为 $H^s_{\mathfrak{F}_1}(E)\approx H^s_{\mathfrak{F}_2}(E)$.

进而, 若 $\forall E\in 2^{K_p}$, $\forall s\geqslant 0$, 都有 $H^s_{\mathfrak{F}_1}(E)=H^s_{\mathfrak{F}_2}(E)$, 则称网 $\mathfrak{F}_1$ 与 $\mathfrak{F}_2$ 强等价, 记为 $\mathfrak{F}_1\equiv\mathfrak{F}_2$.

网具有强等价性.

定理 5.1.4　设 $\mathfrak{M}=\{\mathfrak{F}\}$ 为局部域 K_p 的网集, 2^{K_p} 为 K_p 子集全体所成的集族. 若 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5 \in \mathfrak{M}$ 分别为 $\mathfrak{M}$ 中的闭集网、开集网、紧球网、闭球网、开球网, 则

$$2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_4 \equiv \mathfrak{F}_5.$$

证　由局部域的结构知 $\mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_4 \equiv \mathfrak{F}_5$.

为证 $2^{K_p} \approx \mathfrak{F}_4$, 任取 $E \in 2^{K_p}$ 的 n 覆盖 $\{E_j\}$, 它至多是可数的. 假设 $|E_j|_d = p^{-n_j}, n_j \geqslant n$. 取 $x_j \in E_j$, 令 $U_j = x_j + B_{n_j}$, 则由局部域结构知 $U_j \supset E_j$, 且

$$|U_j|_d = |E_j|_d = p^{-n_j},$$

于是

$$\sum_j |E_j|_d^s = \sum_j |U_j|_d^s.$$

因 $U_j \in \mathfrak{F}_4$, 又由 $\{E_j\}$ 的任意性, 得到

$$\inf\left\{\sum_j |E_j|_d^s\right\} = \inf\left\{\sum_j |U_j|_d^s\right\},$$

这蕴含 $H^s(E) \geqslant H^s_{\mathfrak{F}_4}(E)$.

另一方面, 由 $2^{K_p} \supset \mathfrak{F}_4$, 蕴含 $H^s(E) \leqslant H^s_{\mathfrak{F}_4}(E)$. 故得

$$H^s(E) = H^s_{\mathfrak{F}_4}(E),$$

这蕴含 $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_4$. 于是 $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_4 \equiv \mathfrak{F}_5$.

进而, 由 $2^{K_p} \supset \mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_4$, 得 $H^s(E) \leqslant H^s_{\mathfrak{F}_1}(E) \leqslant H^s_{\mathfrak{F}_4}(E)$, 故由 $H^s(E) = H^s_{\mathfrak{F}_4}(E)$ 得

$$H^s(E) = H^s_{\mathfrak{F}_1}(E) = H^s_{\mathfrak{F}_4}(E),$$

这蕴含 $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_4$. 于是 $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_4 \equiv \mathfrak{F}_5$.

再由 $2^{K_p} \supset \mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_5$, 得 $H^s(E) \leqslant H^s_{\mathfrak{F}_2}(E) \leqslant H^s_{\mathfrak{F}_5}(E)$, 故由 $H^s(E) = H^s_{\mathfrak{F}_5}(E)$ 得

$$H^s(E) = H^s_{\mathfrak{F}_2}(E) = H^s_{\mathfrak{F}_5}(E),$$

这蕴含 $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}_5$. 最后, $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_4 \equiv \mathfrak{F}_5$. 定理得证.

这个定理的意义在于: 在局部域 K_p 的情形, 为计算 Hausdorff 测度, 可以根据具体情况选择强等价网覆盖中的任一种: $2^{K_p} \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_4 \equiv \mathfrak{F}_5$. 例如, 取

$\mathfrak{F}_4$ 或 $\mathfrak{F}_5$. 因此对 s 维 Hausdorff 测度用

$$H^s(E)=\lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\sum_{j=1}^{+\infty}|U_j|_d^s:\ \bigcup_j U_j\supset E \text{ 为 } E \text{ 的球覆盖}, |U_j|_d<p^{-n}\right\}$$

表示, 将是很简便的.

例 5.1.1 局部域上的 Cantor 型集.

在 1.2 节中定义了 K_3 中的 Cantor 型三分集 C_3. 本例中, 取 $p\geqslant 2$ 为素数, 对 p 级数域 K_p, 素元 $\beta\in K_p$, $|\beta|=p^{-1}$. 对于 $0\leqslant q\leqslant p-1$, 作

$$\begin{aligned}V_0=&D=\{x\in K_p:\ |x|\leqslant 1\},\\ V_1=&\left(0\cdot\beta^0+B^1\right)\bigcup\left(2\beta^0+B^1\right)\bigcup\cdots\bigcup\left((p-q)\beta^0+B^1\right),\\ V_2=&\left(1\cdot\beta^0+0\cdot\beta^1+B^2\right)\bigcup\left(1\cdot\beta^0+2\cdot\beta^1+B^2\right)\bigcup\cdots\\ &\bigcup\left(1\cdot\beta^0+(p-q)\cdot\beta^1+B^2\right),\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

令

$$C_p^q=D\Big\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}V_j\right).$$

称 C_p^q 为局部域 K_p 上的 Cantor 型集. 可以将 C_p^q 改写为

$$C_p^q=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{i=1}^{q^n}I_{n,i},$$

其中

$$\begin{aligned}&I_{1,1}=1\cdot\beta^0+B^1,\ I_{1,2}=(p-q+1)\beta^0+B^1,\cdots,\ I_{1,q}=(p-1)\beta^0+B^1,\\ &I_{2,1}=1\cdot\beta^0+1\cdot\beta^1+B^2,\ \cdots,\ I_{2,q^2}=(p-1)\beta^0+(p-1)\beta^1+B^2,\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

Cantor 型集的构造过程归纳为: 从 $D=B^0$ 中取走 $0\cdot\beta^0+B^1$, $2\beta^0+B^1,\cdots$, $(p-q)\beta^0+B^1$,保留 $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $\cdots$, $I_{1,q}$; 然后重复这个过程; 在第 n 步后, 余下的集为 $I_{n,1}$, $I_{n,2}$, $\cdots$, I_{n,q^n}, 且 $|I_{n,i}|_d=p^{-n}$. 称 $I_{n,1}$, $I_{n,2}$, $\cdots$, I_{n,q^n} 位于 Cantor 型集 C_p^q 的第 n 层 (如图 5.1.2).

现在来求 Cantor 型集的 Hausdorff 测度与维数.

引理 5.1.2 对于 Cantor 型集 $C_p^q=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{q^n}I_{n,i}$, 以及任意球 $U\subset D\subset K_p$, 假设

$$U\bigcap C_p^q\neq\varnothing,\qquad |U|_d=p^{-t},$$

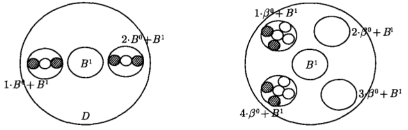


图 5.1.2

且对任意固定的 $l \in \mathbb{N}$, 存在与 U,t 无关的 s, 使得

$$\sum_{I_{l,i} \subset U} |I_{l,i}|_d^s = |U|_d^s \tag{5.1.3}$$

成立, 这里球 $I_{l,i} \subset U$ 满足: $I_{l,i} \bigcap I_{l,k} = \varnothing,\ i \neq k;\ |I_{l,i}|_d = p^{-l}$. 则断言 $s = \dfrac{\ln q}{\ln p}$.

证　对于任意固定的 $l \in \mathbb{N}$, 由 C_p^q 的构造, 可假设存在 q^{l-t} 个互不相交的球 $I_{t,i}$, 直径为 p^{-l}, 且都包含在 U 中, 并满足 (5.1.3). 于是, 由

$$(p^{-t})^s = |U|_d^s = \sum_{I_{l,i} \subset U} |I_{l,i}|_d^s = \sum_{i=1}^{q^{l-t}} |I_{l,i}|_d^s = q^{l-t}\left(p^{-l}\right)^s$$

得到

$$q^{l-t} p^{-ls} = p^{-ts},$$

此即 $q^{l-t} = p^{(l-t)s}$, 蕴含 $s = \dfrac{\ln q}{\ln p}$. 引理得证.

定理 5.1.5　设 K_p 为 p 级数域, 则对于其上的 Cantor 型集 $C_p^q = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{q^n} I_{n,i}$, 有

(1) C_p^q 的 Haar 测度 $\left|C_p^q\right|$ 为零, $\left|C_p^q\right| = 0$;

(2) C_p^q 的 $s = \dfrac{\ln q}{\ln p}$ 维 Hausdorff 测度 $H^s(C_p^q)$ 为 1, $H^s(C_p^q) = 1$;

(3) C_p^q 的 Hausdorff 维数 $\dim_H C_p^q$ 为 $\dim_H C_p^q = \dfrac{\ln q}{\ln p}$.

证　首先证明 $H^s(C_p^q) = 1,\ s = \dfrac{\ln q}{\ln p}$.

为此, 只需证: 对于 C_p^q 的任意球覆盖 $\{U_1, U_2, \cdots\}$, $\bigcup\limits_j U_j \supset C_p^q,\ U_j \bigcap C_p^q \neq \varnothing$, 有

$$\sum_j |U_j|_d^s = 1, \quad s = \frac{\ln q}{\ln p}.$$

因 K_p 中的每个球 $I_{n,i}, i=1,\cdots,q^n, n=1,2,\cdots$ 既开又闭且紧, 故 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{q^n} I_{n,i}$ 为紧集, 从而 $C_p^q=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{q^n} I_{n,i}$ 为紧集. 这样, 在球覆盖 $\{U_1,U_2,\cdots\}$ 中, 存在有限覆盖 $\{U_1,U_2,\cdots,U_m\}$, 使得 $U_j\bigcap U_k=\varnothing$, $j\neq k$, 有

$$C_p^q\subset\bigcup_{j=1}^{m}U_j.$$

进而, 设 N 是使得 $|U_j|_d\leqslant p^{-N}$, $1\leqslant j\leqslant m$ 的最大整数. 选取 $k>N$, 使得每个球 $I_{k,i}$ 都包含在某个 U_j 中. 于是, 据引理 5.1.2, 有

$$H^s(C_p^q)=\sum_j|U_j|_d^s=\sum_j\sum_{I_{k,i}\subset U_j}|I_{k,i}|_d^s=\sum_{i=1}^{q^k}|I_{k,i}|_d^s=1,$$

其中 $s=\dfrac{\ln q}{\ln p}$, $|I_{k,i}|=p^{-k}$.

C_p^q 的 Haar 测度为零, $\left|C_p^q\right|=0$, 可直接由 $C_p^q=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{q^n} I_{n,i}$ 计算而得到.

定理 5.1.5 的证明完全利用了局部域的特点, 与欧氏空间中的证明迥然不同, 体现了局部域分析方法的优越性.

5.1.2 盒维数

1. 预备引理

对于集 $E\subset K_p$, 正整数 $n\in\mathbb{N}$, 使用以下记号:

$N_n(E)$: K_p 中覆盖 E 的直径为 p^{-n} 的球的最小个数;

$N_n^*(E)$: K_p 中覆盖 E 的直径至多为 p^{-n} 的球的最小个数;

$M_n(E)$: K_p 中直径为 p^{-n} 的球心在 E 中的互不相交的球的最大个数.

由局部域的结构可知, $N_n(E)$, $N_n^*(E)$ 中所述的球也都是互不相交的.

引理 5.1.3 设 $E\subset K_p$, $n\in\mathbb{N}$, 则

$$N_n(E)=N_n^*(E)=M_n(E).$$

证 首先证 $N_n(E)=N_n^*(E)$.

显然, $N_n^*(E)\leqslant N_n(E)$. 为证 $N_n^*(E)\geqslant N_n(E)$, 取 $\{U_1,U_2,\cdots,U_{N_n^*(E)}\}$ 是直径至多为 p^{-n} 的 E 的覆盖, $U_j\bigcap E\neq\varnothing$, $1\leqslant j\leqslant N_n^*(E)$. 不失一般性, 可设

$$|U_1|_d=|U_2|_d=\cdots=|U_k|_d=p^{-n},$$
$$|U_j|_d<p^{-n},\quad k<j\leqslant N_n^*(E),$$

其中 $1\leqslant k\leqslant N_n^*(E)$.

下面证明下述断言: 对于所有满足 $i \neq j,\ k < i, j \leqslant N_n^*(E)$ 的 i 与 j, 都有

$$d(U_i, U_j) > p^{-n}. \tag{5.1.4}$$

事实上, 若存在某一对 $i,\ j$, 满足 $i \neq j,\ k < i, j \leqslant N_n^*(E)$, 使得 $d(U_i, U_j) \leqslant p^{-n}$, 则因 $|U_i|_d < p^{-n}, |U_j|_d < p^{-n}$, 由局部域的结构, 得到

$$|U_i \bigcup U_j|_d \leqslant p^{-n}.$$

于是, 存在一个新球, 记为 U_0, 使得 $U_i \bigcup U_j \subset U_0$ 且 $|U_0|_d = p^{-n}$. 这与 $N_n^*(E)$ 是直径至多为 p^{-n} 的覆盖 E 的球的最小个数相矛盾. 于是, 断言 (5.1.4) 成立.

现在, 对于任意满足 $k < i \leqslant N_n^*(E)$ 的 i, 固定某个 $x_i \in U_i \bigcap E$, 则对于满足 $j \neq i,\ k < i, j \leqslant N_n^*(E)$, 有 $d(x_i + B^n, U_j) > 0$. 从而 $d(x_i + B^n, x_j) > 0$.

这样, $x_j \notin x_i + B^n$, 从而蕴含 $(x_i + B^n) \bigcap (x_j + B^n) = \varnothing$. 故推得

$$d\left(x_i + B^n, x_j + B^n\right) > 0$$

对于所有满足 $k < i, j \leqslant N_n^*(E)$ 的 $i,\ j$ 成立. 于是

$$U_1,\ U_2,\ \cdots, U_k,\ x_{k+1} + B^n,\ \cdots,\ x_{N_n^*(E)} + B^n$$

成为互不相交的具有直径 p^{-n} 的 E 的新覆盖, 因此得到 $N_n(E) \leqslant N_n^*(E)$. 从而 $N_n^*(E) = N_n(E)$ 得证.

其次证 $N_n(E) = M_n(E)$.

为证 $N_n(E) \leqslant M_n(E)$, 设 $\{A_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 是半径为 p^{-n} 的集 E 的球覆盖. 不失一般性, 设 $\forall j$, 有 $A_j \bigcap E \neq \varnothing$, 因此球 A_j 的球心必在 E 中. 由局部域的结构, 任意两个球只有两种位置: 互不相交, 或一个包含在另一个之中, 故据 $M_n(E)$ 的定义, 必有

$$N_n(E) \leqslant M_n(E).$$

反之, 为证 $N_n(E) \geqslant M_n(E)$, 设 $\left\{E_1, E_2, \cdots, E_{N_n(E)}\right\}$ 是半径为 p^{-n} 的集 E 的球覆盖, 且 $E_j \bigcap E \neq \varnothing,\ j = 1, \cdots, N_n(E)$. 又设 $\left\{F_1, F_2, \cdots, F_{M_n(E)}\right\}$ 是半径为 p^{-n} 而球心在集 E 中的互不相交的球集. 于是, $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant M_n(E)$, 存在 $x_i \in F_i \bigcap E$. 从而, 对于此 $x_i \in F_i \bigcap E$, 存在相应的 E_j, 使得 $x_i \in E_j \in \left\{E_1, E_2, \cdots, E_{N_n(E)}\right\}$, 这蕴含 $E_j = F_i$.

因此, $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant M_n(E)$ 确定一个 $j,\ 1 \leqslant j \leqslant N_n(E)$, 使得 $E_j = F_i$. 再由于两个球集 $\left\{E_1, E_2, \cdots, E_{N_n(E)}\right\}$ 与 $\left\{F_1, F_2, \cdots, F_{M_n(E)}\right\}$ 中的球都是互不相交的, 因此得到 $M_n(E) \leqslant N_n(E)$. 引理得证.

注意到, 在欧氏空间情形, 上述引理并不成立. 本引理给出了在局部域中求分形集的测度与维数时特别方便的依据.

2. 盒维数 (box-counting dimension)

定义 5.1.5 (盒维数) 设 $E \in 2^{K_p}$ 为 K_p 中的有界集, 分别称

$$\overline{\dim}_B E = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln N_n(E)}{n\ln p}, \quad \underline{\dim}_B E = \liminf_{n\to+\infty} \frac{\ln N_n(E)}{n\ln p}$$

为集合 E 的上盒维数与下盒维数. 当 $\overline{\dim}_B E = \underline{\dim}_B E = \dim_B E$ 时, 称 $\dim_B E$ 为 E 的盒维数.

定理 5.1.6 设 $E \in 2^{K_p}$ 为局部域 K_p 中的非空有界集, 则其上、下盒维数有如下表示:

$$\overline{\dim}_B E = \limsup_{n\to+\infty} \left\{1 + \frac{\ln|E(p^{-n})|}{n\ln p}\right\}, \quad \underline{\dim}_B E = \liminf_{n\to+\infty} \left\{1 + \frac{\ln|E(p^{-n})|}{n\ln p}\right\},$$

这里 $|E(\varepsilon)|$ 是集合 $E(\varepsilon) = \{x \in K_p : d(x,E) < \varepsilon\}$(集 E 的 ε邻域) 的 Haar 测度.

证 仅证明上盒维数的情形.

假设 E 能被半径为 p^{-n} 的互不相交的 $N_n(E)$ 个球覆盖, 则集合 E 的 $\varepsilon = p^{-n}$ 邻域 $E(p^{-n})$ 也被这 $N_n(E)$ 个球覆盖, 于是

$$\left|E(p^{-n})\right| \leqslant N_n(E)\, p^{-n}.$$

另一方面, 所有这 $N_n(E)$ 个互不相交的球也被 E 的 p^{-n} 邻域 $E(p^{-n})$ 覆盖, 故有

$$\left|E(p^{-n})\right| \geqslant N_n(E) p^{-n}.$$

于是, $|E(p^{-n})| = N_n(E)\, p^{-n}$. 将其代入 $\overline{\dim}_B E$, 得

$$\overline{\dim}_B E = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln N_n(E)}{n\ln p} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln p^n |E(p^{-n})|}{n\ln p} = \limsup_{n\to+\infty} \left\{1 + \frac{\ln|E(p^{-n})|}{n\ln p}\right\}.$$

定理得证.

定理 5.1.7 设 $E \in 2^{K_p}$ 为局部域 K_p 中的非空有界集, 则上、下盒维数有如下性质:

(1) $\dim_H E \leqslant \underline{\dim}_B E \leqslant \overline{\dim}_B E$;

(2) $\underline{\dim}_B E$ 与 $\overline{\dim}_B E$ 是 E 的单调增函数;

(3) $0 \leqslant \underline{\dim}_B E \leqslant 1,\ 0 \leqslant \overline{\dim}_B E \leqslant 1$; 若 $|E| > 0$, 则 $\dim_B E = 1$;

(4) $\overline{\dim}_B (E_1 \bigcup E_2) = \max\left\{\overline{\dim}_B E_1,\ \overline{\dim}_B E_2\right\}$;

(5) $\overline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B \overline{E}$, $\underline{\dim}_B E = \underline{\dim}_B \overline{E}$, 其中 $\overline{E}$ 是 E 的闭包.

证 (1) 中第一个不等号推导如下:

$$s < \dim_H E \Rightarrow H^s(E) = +\infty \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{s.t. } H_n^s(E) > 1, \forall n > n_0;$$

另一方面,

$$H_n^s(E) \leqslant N_n(E)p^{-ns} \Rightarrow 1 \leqslant H_n^s(E) \leqslant N_n(E)p^{-ns}, \qquad \forall n > n_0.$$

联合上述两结果, 得到 $\dim_H E \leqslant \underline{\dim}_B E$. 第二个不等号由定义得到.

(2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow N_n(E_1) \leqslant N_n(E_2), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ 上、下盒维数单调增加.

(3) $$\overline{\dim}_B E = \limsup_{n\to+\infty}\left\{1 + \frac{\ln|E(p^{-n})|}{n\ln p}\right\} = \limsup_{n\to+\infty}\left\{1 - \frac{\ln|E(p^{-n})|}{\ln p^{-n}}\right\} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \overline{\dim}_B E \leqslant 1;$$

又

$$|E| > 0 \Rightarrow \dim_H E = 1 \Rightarrow 1 = \dim_H E \leqslant \overline{\dim}_B E \leqslant 1 \Rightarrow \overline{\dim}_B E = 1.$$

(4) 由单调性

$$\overline{\dim}_B(E_1 \bigcup E_2) \geqslant \overline{\dim}_B E_1, \quad \overline{\dim}_B(E_1 \bigcup E_2) \geqslant \overline{\dim}_B E_2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\dim}_B(E_1 \bigcup E_2) \geqslant \max\left\{\overline{\dim}_B E_1, \overline{\dim}_B E_2\right\};$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\forall \alpha > \max\left\{\overline{\dim}_B E_1, \overline{\dim}_B E_2\right\} &\Rightarrow \text{足够大的 } n \in \mathbb{N}, N_n(E_j) \leqslant p^{n\alpha}, \ j = 1,2 \\ &\Rightarrow N_n(E_1 \bigcup E_2) \leqslant N_n(E_1) + N_n(E_2) \leqslant 2p^{n\alpha} \\ &\Rightarrow \overline{\dim}_B(E_1 \bigcup E_2) \leqslant \alpha \\ &\Rightarrow \overline{\dim}_B(E_1 \bigcup E_2) \geqslant \max\left\{\overline{\dim}_B E_1, \overline{\dim}_B E_2\right\}.\end{aligned}$$

(5) $E \subset \overline{E} \Rightarrow N_n(E) \leqslant N_n(\overline{E})$;

反之, 设 $\{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$ 是半径为 p^{-n} 的球集, 且 $\bigcup_{j=1}^{k} U_j \supset E$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} U_j \supset \overline{E} \text{ (局部域中的球既开又闭且紧)} \Rightarrow N_n(\overline{E}) \leqslant N_n(E);$$

结合 $N_n(E) \leqslant N_n(\overline{E})$, $N_n(\overline{E}) \leqslant N_n(E)$, 得 $N_n(\overline{E}) = N_n(E)$. 于是 (5) 得证.

3. 重要例子

下面构造上、下盒维数不相等的紧集 (称为 Cantor 型集)$C \subset K_p$ 的例子. 取 q_1, q_2, 使得 $2 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant p-1$; 取 s, t, 使得 $\frac{\ln q_1}{\ln p} < s < t < \frac{\ln q_2}{\ln p}$.

① 对于 q_1 与 p, 构造 Cantor 型集 $C_p^{q_1}$, 如例 5.1.1. 易见, 其中的 q_1 个半径为 p^{-1} 的球 $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $\cdots$, I_{1,q_1} 满足

$$q_1\left(p^{-1}\right)^s \leqslant 1. \tag{5.1.5}$$

② 在 $\forall I_{1,m}, m=1,\cdots,q_1$ 中, 如例 5.1.1 中的方法, 构造 Cantor 型集 $C_p^{q_2}$ 的第 k_1 层, 其中 k_1 足够大, 满足

$$q_1 q_2^{k_1}\left(p^{-1-k_1}\right)^t = q_1 p^{-t}\left(q_2 p^{-t}\right)^{k_1} \geqslant 1. \tag{5.1.6}$$

③ 在 $C_p^{q_2}$ 的第 k_1 层直径为 p^{-k_1} 的球 $I_{k_1,m}, m=1,2,\cdots,q_1^{k_1}$ 中, 构造 Cantor 型集 $C_p^{q_1}$ 的第 k_2 层, 其中 $k_2(k_2>k_1)$ 足够大, 满足

$$q_1 q_2^{k_1} q_1^{k_2}\left(p^{-1-k_1-k_2}\right)^s = q_1 q_2^{k_1} p^{-(1+k_1)s}\left(q_1 p^{-s}\right)^{k_2} \leqslant 1. \tag{5.1.7}$$

由 q_1, q_2, s, t 所满足的关系, 不难验证上述 k_1 与 k_2 是存在的.

④ 继续以上步骤, 得到自然数序列 $\{k_j\}, j\in\mathbb{N}$; 同时得到一个 Cantor 型集, 记为 $C\subset K_p$.

定理 5.1.8 设 $2\leqslant q_1<q_2\leqslant p-1$, $\dfrac{\ln q_1}{\ln p}<s<t<\dfrac{\ln q_2}{\ln p}$, 则如上构造的 Cantor 型集 $C\subset K_p$ 的上、下盒维数满足 $\underline{\dim}_B C\leqslant s<t\leqslant \overline{\dim}_B C$.

证 由上述构造步骤, 有

$$N_1(C)=q_1,\ N_{1+k_1}(C)=q_1q_2^{k_1},\ N_{1+k_1+k_2}(C)=q_1q_2^{k_1}q_1^{k_2},\ \cdots,$$

$$N_{1+k_1+k_2\cdots+k_{2j-1}}(C)=q_1q_2^{k_1}q_1^{k_2}\cdots q_2^{k_{2j-1}},\ N_{1+k_1+k_2\cdots+k_{2j-1}+k_{2j}}(C)=q_1q_2^{k_1}q_1^{k_2}\cdots q_2^{k_{2j-1}}q_1^{k_{2j}},$$

$$\cdots\cdots$$

因此

$$\underline{\dim}_B C\leqslant \varliminf_{j\to+\infty}\frac{\ln N_{1+k_1+k_2+\cdots+k_{2j}}(C)}{(1+k_1+k_2+\cdots+k_{2j})\ln p}=\varliminf_{j\to+\infty}\frac{\ln q_1q_2^{k_1}q_1^{k_2}\cdots q_1^{k_{2j}}}{(1+k_1+k_2+\cdots+k_{2j})\ln p}\leqslant s;$$

$$\overline{\dim}_B C\geqslant \varlimsup_{j\to+\infty}\frac{\ln N_{1+k_1+k_2+\cdots+k_{2j-1}}(C)}{(1+k_1+k_2+\cdots+k_{2j-1})\ln p}=\varlimsup_{j\to+\infty}\frac{\ln q_1q_2^{k_1}q_1^{k_2}\cdots q_2^{k_{2j-1}}}{(1+k_1+k_2+\cdots+k_{2j-1})\ln p}\geqslant t.$$

定理得证.

5.1.3 填充测度与维数

1. 填充 (packing) 测度与填充维数

定义 5.1.6 (填充测度与维数) 设 $E\in 2^{K_p}$ 为 K_p 中的非空集, 称 K_p 中半径至多为 p^{-n} 的互不相交的球族 $\{U_j\}$ 为 E 的 n 填充族, 若 $\forall j$ 都有 $U_j\bigcap E\neq\varnothing$.

设 $s\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$, 记

$$P_n^s(E)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{+\infty}|U_j|_d^s : \{U_j\}\text{ 是 } E \text{ 的 } n \text{ 填充族}\right\},$$

称

$$\mathrm{pre}P^s(E)=\lim_{n\to+\infty}P_n^s(E)$$

为E 的 s 维预填充 (pre-packing) 外测度.

易见, 对于 $0\leqslant s<t<+\infty$, s 维预填充外测度成立

$$\mathrm{pre}P^s(E)<+\infty \quad\Rightarrow\quad \mathrm{pre}P^t(E)=0,$$
$$\mathrm{pre}P^s(E)=+\infty \quad\Rightarrow\quad \mathrm{pre}P^t(E)>0.$$

相应地, 称

$$\mathrm{pre}\dim_P(E)=\sup\{s:\mathrm{pre}P^s(E)=+\infty\}=\inf\{s:\mathrm{pre}P^s(E)=0\}$$

为集 E 的预填充维数.

进而, 称

$$P^s(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{pre}P^s(E_i):\ E=\bigcup_i E_i\right\}$$

为 E 的 s 维填充测度; 称

$$\dim_P(E)=\inf\left\{\sup\left\{\mathrm{predim}_P(E_i):\ E=\bigcup_i E_i\right\}\right\}$$

为 E 的填充维数.

例 5.1.2 局部域中集合的 s 维预填充外测度

设

$$\widetilde{S}=\{\beta^0,\beta^1,\cdots,\beta^k,\cdots\},\quad S=\left\{A\subset\widetilde{S}:\ A\text{ 是 }\widetilde{S}\text{ 中有限个元的和所成的集}\right\}.$$

取 $s=1$, 则易见单点集 $\{\beta^k\}$, 有

$$\mathrm{pre}P^1\left(\{\beta^k\}\right)=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

由 S 在 D 中稠密, 得

$$\mathrm{pre}P^1(S)=1.$$

s 维预填充外侧度不是外侧度, 事实上, 由 $\mathrm{pre}P^1(S)=1$ 与 $\mathrm{pre}P^1\left(\{\beta^k\}\right)=0$, 有

$$1=\mathrm{pre}P^1(S)\geqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{pre}P^1\left(\{\beta^k\}\right)=0,$$

这与外侧度应满足的不等式相悖.

例 5.1.3 局部域中 Cantor 型集 C_p^q 的预填充维数 $\mathrm{predim}_P\left(C_p^q\right)$.

定理 5.1.5 中的 E 的 n 覆盖也是 E 的 n 填充, 因此

$$\text{predim}_P\left(C_p^q\right) = s = \frac{\ln q}{\ln p}.$$

关于 s 维预填充外测度 $\text{pre}P^s(E)$、s 维填充测度 $P^s(E)$、预填充维数 $\text{predim}_P(E)$、填充维数 $\dim_P(E)$, 有如下性质:

定理 5.1.9 设 $s \geqslant 0$, 则对于非空集 $E \subset K_p$, 有

(1) $H^s(E) \leqslant P^s(E) \leqslant \text{pre}P^s(E); \dim_H(E) \leqslant \dim_P(E) \leqslant \text{pre}\dim_P(E)$;

(2) $\overline{\dim}_B E = \text{predim}_P E$; 若 $\dim_B E$ 存在, 则 $\dim_B E = \text{predim}_P E$.

证 (1) 因 E 的 n 覆盖也是它的 n 填充, 故 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$H_n^s(E) \leqslant P_n^s(E),$$

这蕴含 (1) 中的 $H^s(E) \leqslant \text{pre}P^s(E)$. (1) 中不等式 $H^s(E) \leqslant P^s(E)$ 的证明如下.

注意到 Hausdorff 测度的一个性质

$$H^s(E) = \inf\left\{\sum_i H^s(E_i): \ E = \bigcup_i E_i\right\},$$

再由 $H^s(E) \leqslant \text{pre}P^s(E)$, 得

$$\begin{aligned} H^s(E) &= \inf\left\{\sum_i H^s(E_i): \ E = \bigcup_i E_i\right\} \\ &\leqslant \inf\left\{\sum_i \text{pre}P^s(E_i): \ E = \bigcup_i E_i\right\} = P^s(E). \end{aligned}$$

(2) 设 $s \geqslant 0$, 因 $M_n(E)p^{-ns} \leqslant P_n^s(E)$, 从而

$$\limsup_{n\to+\infty} M_n(E)p^{-ns} \leqslant \text{pre}P^s(E).$$

于是

$$\begin{aligned} s > \text{predim}_P(E) &\Rightarrow \text{pre}P^s(E) = 0 \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} M_n(E)p^{-ns} = 0 \\ &\Rightarrow s \geqslant \overline{\dim}_B E \Rightarrow \text{predim}_P(E) \geqslant \overline{\dim}_B E. \end{aligned}$$

欲证相反不等式, 当 $\text{predim}_P(E) = 0$ 时, 显然有 $0 = \text{predim}_P(E) \leqslant \overline{\dim}_B E$, 故只需对于 $\text{predim}_P(E) > 0$ 证明不等式.

设 $\text{predim}_P(E) > 0$, 取 $0 < \alpha < s < \text{predim}_P(E)$, 归纳地定义自然数子序列 $\{n_j\}$:

$$s < \text{predim}_P(E) \Rightarrow \text{pre}P^s(E) = +\infty \Rightarrow \text{取 } n_0, \text{ s.t.}$$

$$P_n^s(E)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{+\infty}|U_j|_d^s:\ \{U_j\}\text{ 是 }E\text{ 的 }n_0\text{ 填充族}\right\}>1$$

$\Rightarrow$ 若 n_j已经定义, 选取一个n_j填充族 $\{U_j\}$, s.t. $\sum|U_j|_q^s\geqslant 1$.

设 $j_k=\#\left\{U_j:\ |U_j|_d=p^{-k}\right\}$, 则

$$\sum_{k=0}^{+\infty}p^{-ks}j_k=\sum|U_j|_d^s\geqslant 1$$

$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, s.t. $p^{-ks}j_k\geqslant p^{-k\alpha}\left(1-p^{-\alpha}\right)$, 否则, 有 $\sum\limits_{k\geqslant 0}p^{-ks}j_k<1$. 从而确定 $n_{j+1}=k+1$. 至此, 自然数子序列 $\{n_j\}$ 得以确定

$\Rightarrow \forall n_j$, 定义填充族 $\{V_i:1\leqslant i\leqslant j_k\}$, s.t. $|V_i|_d=p^{-k-1}$, $j_k\geqslant p^{k(s-\alpha)}\left(1-p^{-\alpha}\right)$

$\Rightarrow M_{k+1}(E)\geqslant j_k\geqslant p^{k(s-\alpha)}\left(1-p^{-\alpha}\right)\quad\Rightarrow\quad \overline{\dim}_B E\geqslant s-\alpha$, 由 α 的任意性得

$\Rightarrow \operatorname{predim}_P(E)\leqslant\overline{\dim}_B E$.

定理得证.

填充测度是一种外测度, 它与 Hausdorff 测度具有类似的性质, 具有单调性、可数稳定性 (如定理 5.1.3 (1), (2)).

例 5.1.4　局部域上 Cantor 型集 C_p^q 的填充维数 $\dim_P\left(C_p^q\right)$.

定理 5.1.9 与例 5.1.3 给出

$$\dim_P\left(C_p^q\right)=\frac{\ln q}{\ln p}.$$

2. 各种维数的关系的例

综上讨论, 在局部域 K_p 上各种维数有如下关系:

$$\dim_H(E)\leqslant\underline{\dim}_B(E)\leqslant\overline{\dim}_B(E)=\operatorname{pre}\dim_P(E),$$
$$\dim_H(E)\leqslant\dim_P(E)\leqslant\overline{\dim}_B(E)=\operatorname{pre}\dim_P(E).$$

这些关系之间的“$\leqslant$”, 是否有例子使得不等号成立? 5.1.2 节中的重要例子 Cantor 型集 C 与定理 5.1.8 给出 $\underline{\dim}_B(C)<\overline{\dim}_B(C)$. 现在给出 $\dim_H(E)<\dim_B(E)$ 的例子.

例 5.1.5　取例 5.1.2 中的 $\widetilde{S}=\{\beta^0,\beta^1,\cdots,\beta^k,\cdots\}$ 与

$$S=\left\{A\subset\widetilde{S}:\ A\text{ 是 }\widetilde{S}\text{ 中有限个元的和所成的集}\right\},$$

下面证明 $\dim_H S=0<1=\dim_B S$.

事实上, 由 S 是可数集, 故 $\dim_H S=0$; 另一方面, S 在 D 中稠密, $\overline{S}=D$, 故

$$\dim_B S=\dim_B\overline{S}=\dim_B D=1.$$

局部域 K_p 上其他类型的测度与维数, 还有许多有趣与有用的开问题, 例如相似性维数、Fourier 维数、谱维数、容量维数、信息量维数、Liapunov 维数, 等等, 如何定义, 有何用处, 都有待于研究. 还可以从量纲函数的角度出发, 推广局部域上的各种测度与维数. 这些开问题都将吸引数学工作者和科学工作者在以后的科研工作中进行.

思 考 题

1. 试证定理 5.1.3 (2)~(6).
2. 研究在几种几何变换下维数的不变性: 平移、Lip 变换、自相似、自仿.
3. 局部域中的开集、闭集、紧集的 Hausdorff 维数有何规则?
4. 若 $E \subset K_p$ 的 Haar 测度为正 $|E| > 0$, 试问该集的 Hausdorff 测度如何? Hausdorff 维数又如何?
5. 研究 $\dim_H(E) \leqslant \underline{\dim}_B(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E) = \operatorname{pre}\dim_P(E)$ 中成立等式与不等式的集合.
6. 研究 $\dim_H(E) \leqslant \dim_P(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E) = \operatorname{pre}\dim_P(E)$ 中成立等式与不等式的集合.
7. 从量纲函数的概念出发, 建立局部域上的测度与维数.

5.2 局部域 K_p 中集合维数的分析表示

本节的主要目的是建立局部域中集合的各种维数的分析表示 [45],[86].

5.2.1 局部域中的 Borel 可测集、Borel 测度

本节在 5.1 节的基础上, 研究局部域 K_p 的 Borel 集类 $\mathfrak{B}(K_p)$ 中的 Borel 集, 以及相应的测度与维数. 设 K_p 上的 Borel 测度所成的集为 $\mathfrak{N}(K_p) = \{\mu: \mu \text{ 是 } K_p$ 上的 Borel 测度$\}$, 相应的测度空间为 $(K_p, \mathfrak{B}(K_p), \mu)$, $\forall E \in \mathfrak{B}(K_p)$ 与 $\mu \in \mathfrak{N}(K_p)$.

子集 $E \subset K_p$ 的 Haar 测度记为 $|E|$, $0 \leqslant |E| \leqslant \infty$. Haar 测度是 K_p 上的 Borel 测度, 将测度空间 $(K_p, \mathfrak{B}(K_p), \mu(E) = |E|)$ 视为一般测度空间 $(K_p, \mathfrak{B}(K_p), \mu)$ 的特例. 进而, 对分形空间 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 成立 $\mathbb{K}(K_p) \subset \mathfrak{B}(K_p)$.

紧集与开集的 Borel 测度有如下性质:

(1) $\forall$ 紧集 $E \in \mathbb{K}(K_p) \Rightarrow 0 \leqslant \mu(E) < +\infty$;

(2) $\forall$ 开集 $E \in \mathfrak{B}(K_p), E \neq \varnothing \Rightarrow 0 < \mu(E) < +\infty$.

定义 5.2.1 (Borel 测度的支集) 设 $\mu \in \mathfrak{N}(K_p)$ 为 K_p 上的 Borel 测度, 称

$$\operatorname{supp}\mu = K_p \Big\backslash \left\{ \bigcup_j U_j: \ \mu|_{U_j}(E) = 0, U_j \subset K_p \text{ 是开集}, \forall E \subset K_p \right\}$$

为 Borel 测度 μ 的支集.

由定义知, Borel 测度 μ 的支集为闭集.

5.2.2 分布维数

对于局部域中的非空集合 $E \subset K_p$, 在 5.1 节定义了 s 维 Hausdorff 测度与 Hausdorff 维数, 定义 5.1.1 与定义 5.1.2 是从覆盖的角度出发的, 现在要给出 Hausdorff 维数的分析定义, 这对于从分析角度出发研究分形是大有好处的.

1. 分布维数 (distribution dimension)

首先给出一个在分形分析中起关键作用的引理.

引理 5.2.1　设 $E \subset K_p$ 是非空 Borel 集, 且对某个 $0 < d < +\infty$ 有 $H^d(E) = +\infty$. 则存在紧集 $F \in \mathbb{K}(K_p)$, $F \subset E$, $0 < H^d(F) < +\infty$, 且 $\exists b > 0$, 使 $\forall l \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \mathbb{Z}$ 有

$$H^d\left(F \bigcap B^{l,i}\right) \leqslant bp^{-id},$$

其中 $B^{l,i} = z_{l,i} + B^i$, $z_{l,i} \in K_p$ 为某个元, 且 $B^{l,i} \bigcap B^{k,i} = \varnothing$, $k \neq l$.

这个引理的证明, 在经典情形可参看文献 [12], [36], 局部域情形留作练习.

定义 5.2.2(空间 $B_{rt}^{s,\Theta}(K_p)$)　设 $\Theta \subset K_p$ 为非空闭集, Haar 测度 $|\Theta| = 0$. 对于 $s \in \mathbb{R}, 0 < r, t \leqslant +\infty$, 定义 B 型空间 $B_{rt}^s(K_p)$(定义 4.1.3) 的子空间

$$B_{rt}^{s,\Theta}(K_p) = \left\{f \in B_{rt}^s(K_p):\ \langle f, \varphi\rangle = 0, \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p),\ \varphi|_\Theta = 0\right\},$$

其中 $\varphi|_\Theta$ 是 φ 在 Θ 上的限制. 特别地, 取 $s = \sigma, r = t = \infty$, 得 Hölder 型空间

$$C^\sigma(K_p) = B_{\infty\infty}^\sigma(K_p)$$

与子空间

$$C^{\sigma,\Theta}(K_p) = B_{\infty\infty}^{\sigma,\Theta}(K_p).$$

引理 5.2.2　当 $s \leqslant \sigma_r = \left(\dfrac{1}{r} - 1\right)_+$, $0 < r, t \leqslant +\infty$ 时, $B_{rt}^{s,\Theta}(K_p)$ 由奇异分布组成.

证　对于 $0 < r, t \leqslant +\infty$, $s > \sigma_r = \left(\dfrac{1}{r} - 1\right)_+$, 据定理 4.1.3(5) 知此时 $B_{rt}^s(K_p) \subset L_{\text{loc}}^1(K_p)$, 故由正则分布组成. 于是, 对于 $|\Theta| = 0$, 当 $0 < r, t \leqslant +\infty, s > \sigma_r$ 时, 有

$$\text{supp} f \subset \Theta, \quad \forall f \in B_{rt}^{s,\Theta}(K_p).$$

故 $B_{rt}^{s,\Theta}(K_p) = \{0\}$. 换言之, 当 $0 < r, t \leqslant +\infty$, $s \leqslant \sigma_r$ 时, $B_{rt}^{s,\Theta}(K_p)$ 由奇异分布组成.

定义 5.2.3 (分布维数)　设 $E \subset K_p$ 为非空 Borel 集, $|E| = 0$, 定义 E 的分布维数为

$$\dim_D E = \sup\left\{d:\ C^{-1+d,\Lambda}(K_p) \neq \{0\} \text{ 对某个紧集 } \Lambda \in \mathbb{K}(K_p), \Lambda \subset E\right\},$$

这里 $C^{-1+d,\Lambda}(K_p)\neq\{0\}$ 表示空间 $C^{-1+d,\Lambda}(K_p)$ 是非平凡的.

定理 5.2.1 分布维数 $\dim_D E$ 有如下性质:

(1) $E_1\subset E_2\Rightarrow \dim_D E_1\leqslant \dim_D E_2$;

(2) 对 $E\in\mathbb{K}(K_p)$ 为紧集, 则

$$\dim_D E=\sup\left\{d:\ C^{-1+d,E}(K_p)\neq\{0\}\right\};$$

(3) 若 $E\subset K_p$, $|E|=0$, 则

$$\dim_D E=\sup\left\{\dim_D\Theta:\Theta\subset E,\Theta\in\mathbb{K}(K_p)\right\};$$

(4) $0\leqslant \dim_D E\leqslant 1$.

证 仅证明 (4), 其余三个性质留作练习.

若 $-1+d>0$, 对于紧集 $\Theta\in\mathbb{K}(K_p)$, 有 $C^{-1+d,\Theta}(K_p)=\{0\}$, 成为平凡的. 但是, $C^{-1+d,\Theta}(K_p)\neq\{0\}$ 为非平凡, 故有 $-1+d\leqslant 0$, 这蕴含 $d\leqslant 1$.

另一方面, 为证 $\dim_D E\geqslant 0$, 注意到狄拉克分布 $\delta\in C^{-1}(K_p)$, 这是因为 $r=t=\infty$, $s=-1$ 满足 $s<\sigma_r=\left(\dfrac{1}{r}-1\right)_+=0$, 因此, 若 $\{0\}=\Lambda\subset E$, 则 δ 奇异分布必属于 $C^{-1}(K_p)=B^{-1}_{\infty\infty}(K_p)$, 故 $C^{-1,\Theta}(K_p)$ 是非平凡的. 然而, 单点集 $\{0\}$ 可用 E 中任一点代替, 从而

$$\dim_D E=\sup\left\{d:\ C^{-1+d,\Lambda}(K_p)\neq\{0\}\text{对某个紧集 }\Lambda\in\mathbb{K}(K_p),\Lambda\subset E\right\}\geqslant 0.$$

分布维数的意义在于: 它是 Hausdorff 维数的一种分析表示. 为证明这个事实, 先证明两个重要引理.

引理 5.2.3 设 $\Theta\subset K_p$ 为非空 Borel 集, $|\Theta|=0$, 则

(1) $\forall s\leqslant 0$, $C^{s,\Theta}(K_p)\neq\{0\}\Leftrightarrow\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta=0\}$ 在 $B^{-s}_{11}(K_p)$ 中不稠密;

(2) $\forall s\leqslant 0, 1<r\leqslant+\infty$, $B^{s,\Theta}_{rr}(K_p)\neq\{0\}\Leftrightarrow\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta=0\}$ 在 $B^{-s}_{r'r'}(K_p)$ 中不稠密.

证 (1) 据 $\left(B^{-s}_{11}(K_p)\right)^*=B^s_{\infty\infty}(K_p)=C^s(K_p)$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在非零的 $f\in C^{s,\Theta}(K_p)$, 故 $C^{s,\Theta}(K_p)\neq\{0\}$ 非平凡, 从而

$$\overline{\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta=0\}}\subsetneqq B^{-s}_{11}(K_p).$$

反之, 若存在非零 $f\in C^{s,\Theta}(K_p)$, 则必有 $\overline{\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta=0\}}\subsetneqq B^{-s}_{11}(K_p)$, 否则将导致矛盾.

(2) 的证明类似于 (1), 只要利用等式 $\left(B^{-s}_{r'r'}(K_p)\right)^*=B^s_{rr}(K_p)$ 即可.

引理 5.2.4 设 $\Theta\subset K_p$ 为非空紧集, $\dim_H\Theta<1$, 则 $\forall\rho$, $\dim_H\Theta<\rho<1$, 有

(1) $\{\varphi \in \mathbb{S}(K_p): \varphi|_\Theta = 0\}$ 在 $B_{11}^{-\rho+1}(K_p)$ 中稠密;

(2) $\{\varphi \in \mathbb{S}(K_p): \varphi|_\Theta = 0\}$ 在 $B_{r'r'}^{\frac{-\rho+1}{r'}}(K_p)$ 中稠密, $1 < r \leqslant +\infty$.

证 (1) 分三步证明.

① 不失一般性, 假设 $\Theta \subset D$, 由 Θ 的紧性, $\forall \eta > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, 存在有限球覆盖 $\{U_j\}$, $|U_j|_d \leqslant p^{-i}$, $j = 1, 2, \cdots, N$, 使得 $\sum\limits_{j=1}^{N} |U_j|_d^\rho < \eta$. 于是, 存在 N 个正整数 $\{k_1, k_2, \cdots, k_N\}$, $k_j \geqslant i$, 使得

$$U_j \bigcap D = x_j + B^{k_j},$$

其中 $\left|B^{k_j}\right|_d = p^{-k_j} < p^{-i}$.

② 对于 $D = \{x \in K_p: |x| \leqslant 1\}$ 的示性函数 $\Phi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$ $\forall \varepsilon > 0$, 存在函数 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, $\varphi|_\Theta = 0$, 使得

$$\|\varphi - \Phi_0\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)} < \varepsilon.$$

事实上, 令 $\varphi(x) = \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{N} \Phi_{U_j}(x)\right) \Phi_0(x)$, 这里 Φ_{U_j} 是 U_j 的示性函数. 显然, $\varphi|_\Theta = 0$ 且 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$. 有

$$\varphi - \Phi_0 = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{U_j} \Phi_0.$$

为估计其范数, 用等式

$$\Phi_{x_j + B^{k_j}} * \varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & k > k_j, \\ p^{k-k_j} \Phi_{x_j + B^k}(x) - p^{k-1-k_j} \Phi_{x_j + B^{k-1}}(x), & 1 \leqslant k \leqslant k_j, \\ p^{-k_j} \Phi_{x_j + D}(x), & k = 0. \end{cases}$$

其中 $\varphi_k = p^k \Phi_{B^k} - p^{k-1} \Phi_{B^{k-1}}, k = 1, 2, \cdots; \varphi_0 = \Phi_0$. 于是得到

$$\begin{aligned} &\|\varphi - \Phi_0\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{N} \Phi_{U_j} \Phi_0 \right\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)} = \left\| \sum_{j=1}^{N} \Phi_{U_j \cap D} \right\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{N} \Phi_{x_j + B^{k_j}} \right\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p^{(-\rho+1)k} \int_{K_p} \left| \Phi_{x_j + B^{k_j}} * \varphi_k(x) \right| dx \right) \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N}\left(p^{-k_j}+2\sum_{k=1}^{k_j}p^{(-\rho+1)k}p^{-k_j}\right)\leqslant c\sum_{j=1}^{N}\left(p^{-k_j}p^{(-\rho+1)k_j}\right)$$
$$=c\sum_{j=1}^{N}p^{-\rho k_j}\leqslant c\eta,$$

其中 c 为与 η 无关的常数.

③ 证 $\overline{\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta=0\}}=B_{11}^{-\rho+1}(K_p)$.

因 $\mathbb{S}(K_p)$ 在 $B_{11}^{-\rho+1}(K_p)$ 中稠密, 只需证: $\forall g\in\mathbb{S}(K_p)$, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p),\varphi|_\Theta=0$, 使得 $\|g-\varphi\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)}<\varepsilon$.

事实上, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$ 是 D 的示性函数的平移、伸缩的有限线性组合, 因此, 由 ② 得

$$\|\varphi(\cdot-h)-\Phi_0(\cdot-h)\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)}<\varepsilon,\quad \forall h\in K_p;$$
$$\|\varphi(h\cdot)-\Phi_0(h\cdot)\|_{B_{11}^{-\rho+1}(K_p)}<\varepsilon,\quad \forall h\in K_p.$$

故 ③ 得证. 从而 (1) 得证.

(2) 证明也分为三步.

① 类似于 (1) 的 ①.

② 证明: 对于 $1<r\leqslant+\infty$, 对于 $\Phi_0(x)$, 以及 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 使得

$$\|\varphi-\Phi_0\|_{B^{\frac{-\rho+1}{r'}}_{r'r'}(K_p)}<\varepsilon.$$

事实上, $1<r\leqslant+\infty$ 蕴含 $r'>1$, 故存在唯一的 $l\in\mathbb{N}$, 使得 $l<r'\leqslant l+1$. 对于覆盖紧集 $\Theta\subset K_p$ 的球族 $\{U_j\}_{j=1}^N$, 存在包含于 U_j 的球 V_j, 使得 $|V_j|_d=|U_j|_d^{l+1}$. 于是

$$V_j\bigcap D=x_j+B^{k_j(l+1)}.$$

令 $\varphi(x)=\left(1-\sum_{j=1}^{N}\Phi_{V_j}(x)\right)\Phi_0(x)$, 则

$$\|\varphi-\Phi_0\|_{B^{\frac{-\rho+1}{r'}}_{r'r'}(K_p)}=\left\|\sum_{j=1}^{N}\Phi_{V_j}\Phi_0\right\|_{B^{\frac{-\rho+1}{r'}}_{r'r'}(K_p)}=\left\|\sum_{j=1}^{N}\Phi_{x_j+B^{k_j(l+1)}}\right\|_{B^{\frac{-\rho+1}{r'}}_{r'r'}(K_p)}$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}p^{(-\rho+1)k}\int_{K_p}\left|\Phi_{x_j+B^{k_j(l+1)}}*\varphi_k(x)\right|^{r'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}}$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}\left(p^{-k_j(l+1)r'}+c_1\sum_{k=1}^{k_j(l+1)}p^{(-\rho+1)k}p^{(k-k_j(l+1))r'}p^{-k}\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N} \left(p^{-k_j(l+1)r'} p^{(r'-\rho)k_j(l+1)} \right)^{\frac{1}{r'}} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N} p^{\frac{-k_j(l+1)\rho}{l+1}} \leqslant c_3 \eta,$$

这里 c_1, c_2, c_3 均为不依赖于 η 的常数.

③ 的证明也与 (1) 中③ 类似, 得到

$$\overline{\{\varphi \in \mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_{\Theta} = 0\}} = B^{\frac{-\rho+1}{r'}}_{r'r'}(K_p).$$

引理得证.

2. 分布维数与 Hausdorff 维数的关系

定理 5.2.2　设 $E \subset K_p$ 为非空 Borel 集, 且其 Haar 测度为 $|E| = 0$, 则

$$\dim_D E = \dim_H E. \tag{5.2.1}$$

证　证明分为三步.

第一步. 证明: 若 (5.2.1) 对每个紧集 $\Theta \subset E$ 成立, 则对 Borel 集 E, $|E| = 0$ 也成立.

事实上, 若 $\forall \Theta \in \mathbb{K}(K_p)$ 紧集, $\Theta \subset E$, 有 $\dim_D \Theta = \dim_H \Theta$, 则由定理 5.2.1 (2), 有

$$\dim_D \Theta = \sup\left\{d:\ C^{-1+d,\Theta}(K_p) \neq \{0\}\right\},$$

得到 $\dim_H \Theta = \sup\left\{d:\ C^{-1+d,\Theta}(K_p) \neq \{0\}\right\}$.

另一方面, 对于 Hausdorff 维数, 据定理 5.1.3 (4), 有

$$\dim_H E = \sup\{\dim_H \Theta:\ \Theta \subset E,\ \Theta \in \mathbb{K}(K_p)\}; \tag{5.2.2}$$

而据定理 5.2.1 (3), 若 $E \subset K_p$, $|E| = 0$, 则

$$\dim_D E = \sup\{\dim_D \Theta:\ \Theta \subset E,\ \Theta \in \mathbb{K}(K_p)\}; \tag{5.2.3}$$

但由假设, 等式 (5.2.1) 对于紧集成立, 即

$$\dim_D \Theta = \dim_H \Theta, \quad \forall \Theta \subset E,\ \Theta \in \mathbb{K}(K_p),$$

所以, (5.2.2) 中的 $\dim_H \Theta$ 与 (5.2.3) 中的 $\dim_H \Theta$, 对于每个 $\Theta \subset E$, $\Theta \in \mathbb{K}(K_p)$ 是相等的, 这就证明了第一步的结论.

第二步. 证明: 对非空紧集 $\Theta \subset E$, $\Theta \in \mathbb{K}(K_p)$, $|\Theta| = 0$, 有 $\dim_H \Theta \leqslant \dim_D \Theta$.

事实上, 当 $\dim_H \Theta = 0$ 时, 据定理 5.2.1 (4), $0 \leqslant \dim_D \Theta \leqslant 1$ 得

$$\dim_H \Theta = 0 \leqslant \dim_D \Theta.$$

下证：若 $\dim_H\Theta>0$, 也成立 $\dim_H\Theta\leqslant\dim_D\Theta$. 推导如下：

$\dim_H\Theta>0\Rightarrow\forall\rho>0,\ 0<\rho<\dim_H\Theta$ 蕴含 $H^\rho(\Theta)=+\infty$

$\Rightarrow\exists\Lambda\in\mathbb{K}(K_p)$，$\Lambda\subset\Theta$, $\exists b>0$, s.t. $0<H^\rho(\Lambda)<+\infty$, 且 $\forall l\in\mathbb{Z}^+$ 与 $i\in\mathbb{Z}$,

有 $H^\rho\left(\Lambda\bigcap B^{l,i}\right)\leqslant bq^{-i\rho}$

$\Rightarrow$ 利用泛函表示式

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_\Lambda\varphi(x)\,\mathrm{d}H^\rho(x),\qquad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$$

定义一个分布 $f\in\mathbb{S}^*(K_p)$. 显然, 对于紧集 Λ, 有 $0<H^\rho(\Lambda)<+\infty$, 且满足 ① $\varphi|_\Theta=0$ 蕴含 $\langle f,\varphi\rangle=0$; ② $f\in C^{-1+\delta}(K_p)$; 这里 $f\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 有 L-P 分解 $f=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}f*\varphi_j,\varphi_j=\Delta_j-\Delta_{j-1}$, $\Delta_j(x)=p^j\Phi_j(x)$, $\Delta_{-1}(x)=0$.

进而, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 卷积可表示为 $f*\varphi(x)=\langle f,\varphi(x-\cdot)\rangle$, 故

$\Rightarrow(f*\varphi_j)(x)=\langle f,\varphi_j(x-\cdot)\rangle=\displaystyle\int_\Lambda\varphi_j(x-\lambda)\,\mathrm{d}H^\rho(\lambda)\leqslant cp^{jn}p^{-j\rho}=cp^{j(n-\rho)}$,

$\forall j\in\mathbb{Z}^+$, 其中 c 为与 j 无关的常数　　(据定理 3.1.25)

$\Rightarrow\|f\|_{C^{-1+\rho}(K_p)}=\sup\limits_j\left(p^{j(-1+\rho)}\sup\limits_x|(f*\varphi_j)(x)|\right)\leqslant c\sup\limits_j\left(p^{j(-1+\rho)}p^{j(1-\rho)}\right)=c$

$\Rightarrow f\in C^{-1+\rho,\Theta}(K_p)$. 进而, 由 f 的构造, 知 f 不恒为零, 故

$\Rightarrow\dim_D\Theta=\sup\left\{d:C^{-1+d,\Theta}(K_p)\neq0\right\}\geqslant\rho$

$\Rightarrow\dim_H\Theta\leqslant\dim_D\Theta$.

第三步. 证明: 对非空紧集 $\Theta\subset E$, $\Theta\in\mathbb{K}(K_p)$, $|\Theta|=0$, 有 $\dim_H\Theta\geqslant\dim_D\Theta$.

事实上, 当 $\dim_H\Theta=1$ 时, 据定理 5.2.1 (4), $0\leqslant\dim_D\Theta\leqslant1$, 得

$$0\leqslant\dim_D\Theta\leqslant1=\dim_H\Theta.$$

下证：若 $\dim_H\Theta<1$, 也成立 $\dim_D\Theta\leqslant\dim_H\Theta$. 推导如下：

$\dim_H\Theta<1\Rightarrow\forall\rho>0,\ \dim_H\Theta<\rho<1$ 蕴含 $H^\rho(\Theta)=0$

$\Rightarrow\overline{\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta=0\}}=B_{11}^{1-\rho}(K_p)$　　(引理 5.2.4(1))

$\Rightarrow C^{-1+\rho}(K_p)=\{0\}$　　(引理 5.2.3(1))

$\Rightarrow\dim_D\Theta\leqslant\rho$

$\Rightarrow\dim_D\Theta\leqslant\dim_H\Theta$.

定理得证.

还有 Hausdorff 维数的另一种分析表示.

定理 5.2.3　设 $E \subset K_p$ 为非空 Borel 集, 且其 Haar 测度为 $|E| = 0$, 若 $1 < r \leqslant +\infty, 0 < t \leqslant +\infty$, 则

$$\dim_H E = \sup\left\{d:\ B_{rt}^{\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\},\ \text{对某个}\ \Theta \subset E, \Theta \in \mathbb{K}(K_p)\right\}. \quad (5.2.4)$$

证　证明分为三步.

第一步. 证明: 若 (5.2.4) 对每个紧集 $\Theta \subset E$ 成立, 则对 Borel 集 $E, |E| = 0$ 也成立.

事实上, 若 (5.2.4) 对每个紧集 $\Theta \subset E,\ \Theta \in \mathbb{K}(K_p)$ 成立, 则

$$\begin{aligned}&\sup\left\{d:\ B_{rt}^{\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\},\ \text{对某个}\ \Lambda \subset \Theta,\ \Lambda \in \mathbb{K}(K_p)\right\}\\ =&\sup\left\{d:\ B_{rt}^{\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\}\right\}.\end{aligned}$$

因此, 由

$$\dim_H E = \sup\{\dim_H \Theta:\ \Theta \subset E,\ \Theta \in \mathbb{K}(K_p)\}$$

便得到 (5.2.4) 对每个 Borel 集 $E, |E| = 0$ 成立.

第二步. 证明: $\forall$ 非空紧集 Θ, $|\Theta|=0$, 有 $\dim_H \Theta \leqslant \sup\left\{d:\ B_{rt}^{\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\}\right\}$.

事实上, 只需证明不等式

$$\dim_H \Theta \leqslant \sup\left\{d:\ B_{rt}^{\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\}\right\} \quad (5.2.5)$$

对 $\dim_H \Theta > 0$ 成立.

对于满足 $0 < \rho < \dim_H \Theta$ 的任一 ρ, $\exists \Lambda \in \mathbb{K}(K_p)$, $\Lambda \subset \Theta$, $\exists b > 0$, s.t. $0 < H^\rho(\Lambda) < +\infty$, 且 $\forall l \in \mathbb{Z}^+$ 与 $i \in \mathbb{Z}$, 有 $H^\rho\left(\Lambda \bigcap B^{l,i}\right) \leqslant bq^{-i\rho}$. 类似于定理 5.2.2 第二步的证明, 也定义一个线性泛函

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}H^\rho, \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p),$$

易见, 由此式确定了一个分布 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 满足

① $0 < H^\rho(\Lambda) < +\infty$; ② $\varphi|_\Theta = 0$ 蕴含 $\langle f, \varphi\rangle = 0$.

于是

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_{r\infty}^{-\frac{1-\rho}{r'}}(K_p)} &= \sup_j\left(p^{j\left(-\frac{1-\rho}{r'}\right)}\|f * \varphi_j\|_{L^r(K_p)}\right)\\ &= \sup_j\left(p^{j\left(-\frac{1-\rho}{r'}\right)}\left\|\int_\Lambda \varphi_j(x-\lambda)\,\mathrm{d}H^\rho(\lambda)\right\|_{L^r(K_p)}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_j \left(p^{j\left(-\frac{1-\rho}{r'}\right)} \left\| \left(\int_\Lambda \varphi_j (x-\lambda) \, \mathrm{d}H^\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{r}} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. \cdot \left(\int_\Lambda \varphi_j (x-\lambda) \, \mathrm{d}H^\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{r'}} \right\|_{L^r(K_p)} \right) \\
&\leqslant c_1 \sup_j \left(p^{j\left(-\frac{1-\rho}{r'}\right)} p^{j\left(\frac{1-\rho}{r'}\right)} \left\| \left(\int_\Lambda \varphi_j (x-\lambda) \, \mathrm{d}H^\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^r(K_p)} \right) \\
&= c_1 \sup_j \left(\int_{K_p} \int_\Lambda \varphi_j (x-\lambda) \, \mathrm{d}H^\rho(\lambda) \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= c_1 \sup_j \left(\int_\Lambda \int_{K_p} \varphi_j (x-\lambda) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}H^\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{r}} = c,
\end{aligned}
$$

这里 c_1, c 是与 j 无关的常数. 由此推得 $f \in B_{r\infty}^{-\frac{1-\rho}{r'},\Theta}(K_p)$. 由构造知, 此 f 是非平凡的, 故知 (5.2.5) 对于 $t=\infty$ 成立.

再据文献 [128] 中的命题 2.2.1 知, 以上范数估计对 $0<t\leqslant+\infty$ 成立, 从而式 (5.2.5) 对于 $0<t\leqslant+\infty$ 也成立. 第二步得证.

第三步. 证明: 对非空紧集 $\Theta \subset E$, $\Theta \in \mathbb{K}(K_p)$, $|\Theta|=0$, 有

$$
\dim_H \Theta \geqslant \sup\left\{ d:\ B_{rt}^{-\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\} \right\}. \tag{5.2.6}
$$

类似地, 也只需对 $\dim_H \Theta < 1$ 证明 (5.2.6).

对于 $\dim_H \Theta < \rho < 1$, 有 $H^\rho(\Theta)=0$. 据引理 5.2.4(2), 得

$$
\overline{\{\varphi \in \mathbb{S}(K_p):\ \varphi|_\Theta = 0\}} = B_{r'r'}^{\frac{1-\rho}{r'}}(K_p),
$$

由此推得, 对于 $1<r\leqslant+\infty$ 有 $B_{rr}^{\frac{-1+\rho}{r'}}(K_p)=\{0\}$, 这表明 (5.2.6) 对于 $r=t$ 成立. 于是, 再据文献 [128] 中的命题 2.2.1 知, 式 (5.2.6) 对于 $1<r\leqslant+\infty, 0<t\leqslant+\infty$ 也成立. 定理得证.

定理 5.2.4 设 $E\subset K_p$ 为非空 Borel 集, 且其 Haar 测度为 $|E|=0$, 若 $1<r\leqslant+\infty$, $0<t\leqslant+\infty$, 则

$$
\begin{aligned}
\dim_D E &= \dim_H E \\
&= \sup\left\{ d:\ F_{rt}^{\frac{-1+d}{r'},\Theta}(K_p) \neq \{0\}, \text{对某个 } \Theta \subset E,\ \Theta \in \mathbb{K}(K_p) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.2.7}
$$

证 据定理 4.1.2(3), 对于 $s\in\mathbb{R}$, $0<r<+\infty$, $0<t\leqslant+\infty$, 有

$$
B_{r\min(r,t)}^{s}(K_p) \subset F_{rt}^{s}(K_p) \subset B_{r\max(r,t)}^{s}(K_p),
$$

因此, 由定理 5.2.3, 本定理成立.

5.2.3 Fourier 维数

在 5.2.2 节, 对于局部域中的非空集合 $E \subset K_p$, 给出了 Hausdorff 维数的分析定义, 本小节讨论 Fourier 维数的分析表示.

1. Fourier 维数

定义 5.2.4 (Fourier 维数) 设 $E \subset K_p$ 为非空 Borel 集, $|E| = 0$, 定义 E 的 Fourier 维数为

$$\dim_F E = \sup\Big\{d\colon \exists \text{Radon 测度 } \mu \neq 0, \text{ 满足 (i) 具紧支集 } \operatorname{supp}\mu \subset E;\\ \text{(ii) } \mu(K_p) < +\infty; \text{ (iii) } |\mu^\wedge(\xi)| \leqslant |\xi|^{-\frac{d}{2}}, 0 \neq \xi \in K_p\Big\}.$$

2. Fourier 维数与 Hausdorff 维数的关系

定理 5.2.5 对于非空 Borel 集 $E \subset K_p$, $|E| = 0$, 有

$$\dim_F E \leqslant \dim_H E.$$

证 设 $\dim_F E > 0$, 取 $0 < d < \dim_F E$, 则存在 Radon 测度 $\mu \neq 0$, 使得

(i) $\operatorname{supp}\mu \in \mathbb{K}(K_p)$, $\operatorname{supp}\mu \subset E$;

(ii) $\mu(K_p) < +\infty$;

(iii) $|\mu^\wedge(\xi)| \leqslant |\xi|^{-\frac{d}{2}}$, $0 \neq \xi \in K_p$.

因 $\mu \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 故可定义一个线性泛函: 对于 $\Lambda \in \mathbb{K}(K_p), \varphi|_\Lambda = 0$ 蕴含 $\langle\mu, \varphi\rangle = 0$ 的 $\forall \varphi \in \mathbb{S}(K_p)$,

$$\langle\mu, \varphi\rangle = \int_{K_p} \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x). \tag{5.2.8}$$

故

$$\begin{aligned}\|\mu\|_{B_{2\infty}^{-\frac{1-d}{2}}(K_p)} &= \sup_j \left(p^{-\frac{1-d}{2}j} \|\mu * \varphi_j\|_{L^2(K)_p}\right) = \sup_j \left(p^{-\frac{1-d}{2}j} \left\|\mu^\wedge \varphi_j^\wedge\right\|_{L^2(\Gamma_p)}\right) \\ &\leqslant \sup_j \left(p^{-\frac{1-d}{2}j} \left\||\xi|^{-\frac{d}{2}} \Delta_j^\wedge - \Delta_{j-1}^\wedge\right\|_{L^2(\Gamma_p)}\right) \leqslant c \sup_j \left(p^{-\frac{1-d}{2}j} p^{\frac{1-d}{2}j}\right) = c,\end{aligned}$$

其中常数 c 与 $j \in \mathbb{Z}^+$ 无关; $\varphi_j = \Delta_j - \Delta_{j-1}, \Delta_j = p^j \Phi_j, \Delta_{-1} \equiv 0$.

于是, $\mu \in B_{2\infty}^{-\frac{1-d}{2},\Lambda}(K_p)$. 据定理 5.2.3, 得 $\dim_H E > d$. 从而

$$\dim_H E \geqslant \dim_F E.$$

定理得证.

3. 例

计算 Cantor 型三分集 $C = D \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} V_j\right)$ 的 Fourier 维数.

取 $p = 3, q = 2$, 则例 5.1.1 中的集 $C = D \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} V_j\right)$, V_j 为

$$V_1 = 0\cdot\beta^0 + B^1,$$
$$V_2 = \left(1\cdot\beta^0 + 0\cdot\beta^1 + B^2\right)\bigcup\left(2\cdot\beta^0 + 0\cdot\beta^1 + B^2\right),$$
$$\cdots\cdots$$

有

$$\dim_H C = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

现在求 $\dim_F C$. 对于任意非零 Radon 测度 $\mu \neq 0$, 且 $\mathrm{supp}\mu \subset C$, $\mu(C) > 0$, 计算 Fourier 变换

$$\mu^\wedge\left(\beta^{-l}\right) = \int_C \overline{\chi\left(\beta^{-l}x\right)}\mathrm{d}\mu(x) = \int_C \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}x_{l-1}}\mathrm{d}\mu(x),$$

其中 $\chi \in \Gamma_{K_3}$ 为局部域 K_3 的选定的非平凡特征, 且取"初值"

$$\chi\left(\beta^{-j}\right) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}, & j = 1, \\ 1, & j \neq 1. \end{cases}$$

因此, 对于所有 $l \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}\mu^\wedge\left(\beta^{-l}\right) &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\mu\left(I_1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\mu\left(I_2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\mu\left(C\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\left(\mu\left(I_1\right) - \mu\left(I_2\right)\right),\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

其中 $I_1 = \{x \in C:\ x_{-1} = 1\}$, $I_2 = \{x \in C:\ x_{-1} = 2\}$. 由 (5.2.9) 得

$$\left|\mu^\wedge\left(\beta^{-l}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2}\mu(C), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

因此, 当 $|\xi| \to +\infty$ 时, $\mu^\wedge(\xi)$ 不趋向于零. 从而, 由 Fourier 维数的定义, 得到

$$\dim_F C = 0.$$

这个例子不仅求得 Cantor 型三分集, 集合 E 的 Fourier 维数, 而且还给出

$$\dim_F E < \dim_H E.$$

Fourier 维数还有一个等价的定义.

定义 5.2.5 (Fourier 维数) 设 $E \subset K_p$ 为非空 Borel 集, $|E| = 0$, 定义其 Fourier 维数为: 对于所有 Borel 测度 $\mu \neq 0, \mathrm{supp}\mu = E$, 集合 E 的 Fourier 维数为

$$\dim_F E = \sup\left\{\alpha:\ \mu^\wedge(t) = o\left(t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \to 0,\ |t| \to +\infty\right\},$$

这里 $\mu^\wedge$ 是 μ 在局部域 K_p 上的 Fourier 变换

$$\mu^\wedge(\xi) = \int_{K_p} \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \xi \in \Gamma_{K_p}.$$

为便于比较, 下面列出经典情形下的 $\dim_F E$ 与 $\dim_H E$ 性质:

(1) $\dim_F E \leqslant \dim_H E$;

(2) 对于 Cantor 三分集, 有 $\dim_F C < \dim_H C$;

(3) 将集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中, $\dim_H E$ 不变; 但是, 即使 $\dim_F E|_{\mathbb{R}^n} > 0$, 却总有 $\dim_F E|_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$.

Fourier 维数很重要, 应当着重研究.

思 考 题

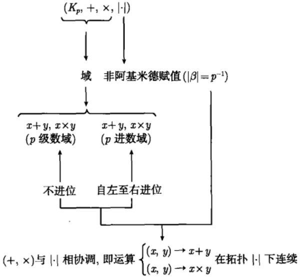
1. 试证引理 5.2.1.
2. 试证分布维数的性质定理 5.2.1(1)~(3).
3. 研究在高维局部域 K^n 上的 Hausdorff 维数、Fourier 维数的定义与性质.
4. 考虑 Fourier 维数在局部域情形下述性质是否成立: 将集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中, $\dim_H E$ 不变; 但是, 即使 $\dim_F E|_{\mathbb{R}^n} > 0$, 却总有 $\dim_F E|_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$.
5. 研究其他各种维数的分析表示, 例如填充维数、盒维数等.

5.3 局部域 K_p 上 p 型微积分与分形维数

本节研究局部域 K_p 上 p 型微积分与分形维数的关系.

5.3.1 K_p 的结构、Cantor 型三分集、Cantor 型三分函数

1. *K_p 上的代数运算与拓扑结构*



于是, (1) 在代数运算 $+, \times$ 下, K_p 成为一个域; (2) 在赋值 $|\cdot|$ 之下, K_p 成为一个局部紧拓扑空间; (3) 运算结构 $(K_p, +, \times)$ 与拓扑结构 $(K_p, |\cdot|)$ 相协调. 从而,

$(K_p,+,\times,|\cdot|)$ 成为一个非平凡非散的全不连通 (因此具有全断型的拓扑结构) 的局部紧拓扑域.

进而, 在 $(K_p,+,\times,|\cdot|)$ 上引入距离

$$d(x,y)=\begin{cases}||x|-|y||, & |x|\neq|y|,\\ |x-y|, & |x|=|y|,\ x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

不难证明, $(K_p,+,\times,|\cdot|,d)$ 成为一个**完备的超距空间**.

在完备超距空间 $(K_p,+,\times,|\cdot|,d)$ 上, 定义局部域上的分形空间 (参考定义 4.3.1(iii)), 记

$$\mathbb{K}(K_p)\equiv\mathbb{K}(K_p,+,\times,|\cdot|,d)=\{\Theta\subset K_p:\ \Theta\text{ 为紧子集}\}.$$

对于 $B\in\mathbb{K}(K_p)$, $x\in K_p$, 称

$$d(x,B)=\inf\{d(x,y):\ y\in B\}$$

为点 x 到集合 B 的距离. 对于 $A,\ B\in\mathbb{K}(K_p)$, 称

$$d(A,B)=\max\{d(x,B):\ x\in A\}$$

为集合 A 到 B 的距离; 称 $d(B,A)$ 为 B 到 A 的距离; 并称

$$h(A,B)=\max\{d(A,B),d(B,A)\}$$

为集合 A 与 B 的 Hausdorff 距离, 称 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 为**局部域上的分形空间**, 称分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 中的集为分形集. 今后, 在分形空间 $(\mathbb{K}(K_p),h)$ 中研究分形集, 以及定义在分形集 $A\in\mathbb{K}(K_p)$ 上的复值函数 $f:\ A\to\mathbb{C}$.

注 5.3.1 再强调一下局部域 K_p 的拓扑结构与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的本质差别, 以 K_3 为例, 对于 K_3 与 $\mathbb{R}^n, n=1$, 取 $B^1\subset K_3$ 与 $[0,1)\subset\mathbb{R}$, 如图 5.3.1 所示.

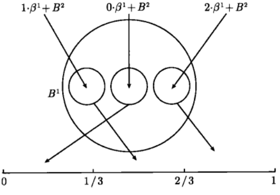


图 5.3.1

在 $y \in 0 \cdot \beta^1 + B^2$ 与 $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ 的对应中, 二者有如下关系:

$$y = 0 \cdot \beta^1 + x_2\beta^2 + x_3\beta^3 + \cdots \longleftrightarrow x = 0\left(\frac{1}{3}\right)^1 + x_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + x_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots.$$

然而, 在 K_3 中, 3 进有理点的无尽表示与其有尽表示不能代表同一个元. 事实上, 例如, $x = \frac{1}{3} \in [0,1)$ 与 $y = 1 \cdot \beta^1 \in 1 \cdot \beta^1 + B^2 \in K_3$, 前者在 $x = \frac{1}{3} \in [0,1) \subset \mathbb{R}$ 中可表示为

$$x = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots = \frac{1}{3}$$

与

$$\overline{x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

代表同一个数, 只是 $x = \frac{1}{3}$ 的有尽表示与无尽表示 (如图 5.3.2).



图 5.3.2

但是, 在局部域 K_3 情形, 如图 5.3.3, 有

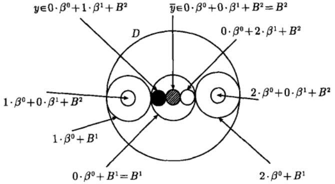


图 5.3.3

$$y = 1 \cdot \beta^1 \in 0 \cdot \beta^0 + 1 \cdot \beta^1 + B^2$$

与

$$\overline{y} = 0 \cdot \beta^1 + 2 \cdot \beta^2 + 2 \cdot \beta^3 + 2 \cdot \beta^4 + \cdots \in 0 \cdot \beta^0 + 0 \cdot \beta^1 + B^2$$

却代表不同的元, 前者 y 在陪集 $0\cdot\beta^0+1\cdot\beta^1+B^2$ 中, 而后者 $\overline{y}$ 在陪集 $0\cdot\beta^0+0\cdot\beta^1+B^2$ 中, 此二陪集是互不相交的. 这也就是 K_3 与 $\mathbb{R}$ 的拓扑结构迥然不同之处, 而且也不可能由一个连续映射使这两种拓扑结构同胚起来 (1.2.9 节).

注 5.3.2 局部域上分形空间中的分形集是紧集. 是否有非紧的分形呢? 可以进一步考虑

$$\mathbb{LK}(K_p)\equiv\mathbb{LK}(K_p,+,\times,|\cdot|,h)=\left\{\Theta\subset K_p:\ \Theta \text{ 为局部紧子集}\right\}.$$

同样, 在 Hausdorff 距离 h 之下, 它是一个局部域上的分形空间, 其中的分形集便是局部紧的. 称 $(\mathbb{LK}(K_p),h)$ 为局部域上的广义分形空间. 我们以研究 $\mathbb{K}(K_p)=\{\Theta\subset K_p:\Theta \text{ 为紧子集}\}$ 为主.

注 5.3.3 局部域 K_p 上分形空间 $\mathbb{K}(K_p)=\{\Theta\subset K_p:\Theta \text{ 为紧子集}\}$ 是完备的超距空间 (定理 4.3.1(2)).

2. K_3 中的 Cantor 型三分集与 Cantor 型三分函数

在进行一般研究之前, 再回顾一下 Cantor 型三分集 $C_3=D\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}V_j$ (参见 1.2.8 节), 其中

$$\begin{aligned}
D&=\{x\in K_3:|x|\leqslant 1\}=\left(0\cdot\beta^0+B^1\right)\bigcup\left(1\cdot\beta^0+B^1\right)\bigcup\left(2\cdot\beta^0+B^1\right),\\
V_1&=B^1=\left\{x\in K_3:|x|\leqslant 3^{-1}\right\}=\left(0\cdot\beta^1+B^2\right)\bigcup\left(1\cdot\beta^1+B^2\right)\bigcup\left(2\cdot\beta^1+B^2\right),\\
V_2&=\left(1\cdot\beta^0+B^2\right)\bigcup\left(2\cdot\beta^0+B^2\right),\\
V_3&=\left(1\cdot\beta^0+1\cdot\beta^1+B^3\right)\bigcup\left(1\cdot\beta^0+2\cdot\beta^1+B^3\right)\bigcup\left(2\cdot\beta^0+1\cdot\beta^1+B^3\right)\\
&\quad\bigcup\left(2\cdot\beta^0+2\cdot\beta^1+B^3\right),\\
&\qquad\cdots\cdots
\end{aligned}$$

称 $C_3=D\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}V_j$ 为局部域上的 Cantor 型三分集.

在 Cantor 型三分集 $C_3=D\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}V_j$ 的补集 $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}V_j$ 上定义 Cantor型三分函数(魔鬼阶梯)$\vartheta(x)$, $x\in K_3$ 如下:

(i) $\operatorname{supp}\vartheta(x)=D$;

(ii) $\forall x\in D$, 记 $x=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}x_j\beta^j$:

① 若存在 $k\geqslant 1$, 使得对于 $0\leqslant j\leqslant k-2$ 有 $x_j\neq 0$, 而使 $x_{k-1}=0$, 则定义

$$\vartheta(x)=\sum_{j=0}^{k-2}(x_j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^k;$$

② 若对于 $0 \leqslant j < +\infty$ 都有 $x_j \neq 0$, 则定义

$$\vartheta(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (x_j - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1};$$

③ 若 $x \notin D$, 则定义 $\vartheta(x) = 0$.

K_3 上与 $\mathbb{R}$ 上的 Cantor 型三分函数的示意图分别在图 5.3.4 与图 5.3.5 中.

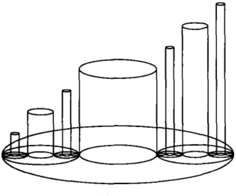


图 5.3.4

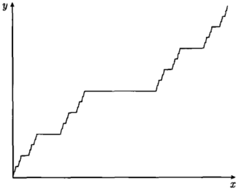


图 5.3.5

5.3.2　K_3 中的 Cantor 型三分函数的 p 型导数与积分

1. 两个引理

为研究 Cantor 型三分函数 $\vartheta(x)$ 的 p 型导数与积分, 先给出两个引理.

引理 5.3.1　对于 Cantor 型三分函数 $\vartheta(x)$, $\forall x \in B^k$, $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\vartheta\left(\beta^0 + \cdots + \beta^{k-2} + 2\beta^{k-1} + x\right) = \frac{1}{2^k} + \vartheta\left(\beta^0 + \cdots + \beta^{k-2} + \beta^{k-1} + x\right).$$

引理 5.3.2 对于 Cantor 型三分函数 $\vartheta(x)$, $\forall x \in D$, 有

$$\vartheta\left(\beta^0 + \beta^1 + \cdots + \beta^{k-1} + \beta^k x\right) = \frac{1}{2^k}\vartheta(x).$$

由 $\vartheta(x)$ 的定义知两引理成立.

2. Cantor 型三分函数的 p 型导数与 p 型积分

令 $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$, 取 $\chi\left(\beta^{-j}\right) = \begin{cases} \omega, & j = 1, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases}$ 下面证明

定理 5.3.1 Cantor 型三分函数 $\vartheta(x)$ 是无穷次 p 型可积的; m 次 p 型可导的, 这里 $m < \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, 且对于 $x \in D$ 有

$$\vartheta^{\langle m\rangle}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\left(\frac{1}{2} + \omega + \frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right) + \overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2 - \chi\left(\beta^{-j}x\right) - \chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right);$$

对于 $x \notin D$, 则有 $\vartheta^{\langle m\rangle}(x) = 0$.

证 分为三步求解.

第一步. 求 $\vartheta^\wedge(\xi) = \displaystyle\int_D \vartheta(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x$, $|\xi| = 3^l$, $l \in \mathbb{Z}$.

① 对于 $l \leqslant 0$: 由 $|\xi x| \leqslant 1$, $\forall x \in D$, 故 $\overline{\chi}_\xi(x)\big|_D = 1$, 从而

$$\begin{aligned}\vartheta^\wedge(\xi) &= \int_D \vartheta(x)\mathrm{d}x = \int_{B^1}\vartheta(x)\mathrm{d}x + \int_{\beta^0+B^1}\vartheta(x)\mathrm{d}x + \int_{2\beta^0+B^1}\vartheta(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6} + \int_{B^1}\vartheta\left(\beta^0 + x\right)\mathrm{d}x + \int_{B^1}\vartheta\left(2\beta^0 + x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由引理 5.3.1, $\vartheta\left(2\beta^0 + x\right) = \dfrac{1}{2} + \vartheta\left(\beta^0 + x\right)$, 故

$$\begin{aligned}\vartheta^\wedge(\xi) &= \frac{1}{3} + 2\int_{B^1}\vartheta\left(\beta^0 + x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} + 2\int_D \vartheta\left(\beta^0 + \beta x\right)\mathrm{d}\left(\beta x\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_D \vartheta\left(\beta^0 + \beta x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再据引理 5.3.2, $\forall x \in D$, 有 $\vartheta\left(\beta^0 + \beta x\right) = \dfrac{1}{2}\vartheta(x)$, 从而, 计算得 $\vartheta^\wedge(\xi) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_D \vartheta(x)\mathrm{d}x$, 故对于 $l \leqslant 0$ 有 $\vartheta^\wedge(\xi) = \dfrac{1}{2}$.

② 对于 $l \geqslant 1$:

$$\vartheta^{\wedge}(\xi)=\int_D \vartheta(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x=\int_{B^1}\frac{1}{2}\vartheta(x)\mathrm{d}x+\int_{\beta^0+B^1}\vartheta(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{2\beta^0+B^1}\vartheta(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x,$$

由公式 $\int_{B^k}\overline{\chi}_\xi(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}3^{-k}, & l\leqslant k,\\ 0, & l>k\end{cases}$ 与 $\vartheta\left(2\beta^0+x\right)=\frac{1}{2}+\vartheta\left(\beta^0+x\right)$, 则

$$\vartheta^{\wedge}(\xi)=\frac{1}{6}\begin{cases}1, & l\leqslant 1\\ 0, & l>1\end{cases}+\frac{1}{6}\overline{\chi}_\xi^2\left(\beta^0\right)\begin{cases}1, & l\leqslant 1\\ 0, & l>1\end{cases}$$
$$+(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^0))\int_{\beta^0+B^1}\vartheta(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x.$$

为计算上式中最后的积分, 当 $k\leqslant l-1$ 时, 据引理 5.3.1, 计算

$$\begin{aligned}
&\int_{\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{k-1}+B^k}\vartheta(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{k-1}+B^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1}}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\
&+\int_{\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{k-1}+\beta^k+B^{k+1}}\vartheta(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\
&+\int_{\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{k-1}+2\beta^k+B^{k+1}}\vartheta(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{6^{k+1}}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{k-1}\right)\begin{cases}1, & l\leqslant k+1\\ 0, & l>k+1\end{cases}\\
&+\frac{1}{6^{k-1}}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{k-1}+2\beta^k\right)\begin{cases}1, & l\leqslant k+1\\ 0, & l>k+1\end{cases}\\
&+\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^k\right)\right)\int_{\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^k+B^{k+1}}\vartheta(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

归纳地, 当 $l\geqslant 1$ 时得到

$$\begin{aligned}
\vartheta^{\wedge}(\xi)&=\int_D\vartheta(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x\\
&=\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^1\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\
&\quad\cdot\int_{\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}+B^{l-1}}\vartheta(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{1}\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\
&\quad\cdot\left\{\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2})\right.\\
&\quad+\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1})\\
&\quad\left.+\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-1}\right)\right)\int_{\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-1}+B^{l}}\vartheta\left(x\right)\overline{\chi}_{\xi}(x)\mathrm{d}x\right\}\\
&=\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{1}\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\
&\quad\cdot\left\{\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2})\right.\\
&\quad+\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1})\\
&\quad+\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-1}\right)\right)\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-1}\right)\\
&\quad\left.\cdot\int_{B^{l}}\vartheta\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-1}+x\right)\overline{\chi}_{\xi}(x)\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
$$

由于 $|\xi|=3^{l}$, 据引理 5.3.2, $\int_{B^{l}}\vartheta\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-1}+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6^{l}}\int_{D}\vartheta(x)\mathrm{d}x$, 故

$$
\begin{aligned}
\vartheta^{\wedge}\left(\xi\right)&=\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{1}\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\
&\quad\cdot\left\{\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2}\right)\right.\\
&\quad+\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1}\right)\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{6^{l}}\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-1}\right)\right)\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-1}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.3.1}
$$

第二步. 求 $\langle\xi\rangle^{m}\vartheta^{\wedge}(\xi)$, $m\in\mathbb{R}$, $|\xi|=3^{l}$, $l\in\mathbb{Z}$.

据第一步 (5.3.1) 式, 立得

① 对于 $l\leqslant 0$, 有 $\langle\xi\rangle^{m}\vartheta^{\wedge}(\xi)=\frac{1}{2}$;

② 对于 $l\geqslant 1$, 有

$$
\begin{aligned}
\langle\xi\rangle^{m}\vartheta^{\wedge}\left(\xi\right)&=3^{lm}\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{1}\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\
&\quad\cdot\left\{\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2}\right)\right.\\
&\quad+\frac{1}{6^{l}}\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1}\right)\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{6^{l}}\left(1+\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{l-1}\right)\right)\overline{\chi}_{\xi}\left(\beta^{0}+\beta^{1}+\cdots+\beta^{l-1}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.3.2}
$$

第三步. 求 $\left(\langle\xi\rangle^m \vartheta^\wedge(\xi)\right)^\vee(x)$, $m\in\mathbb{R}$, $|x|=3^k$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$\left(\langle\xi\rangle^m \vartheta^\wedge(\xi)\right)^\vee(x)=\frac{1}{2}\int_{|\xi|\leqslant 1}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi+\sum_{l=1}^{+\infty}3^{lm}J_l=\frac{1}{2}\begin{cases}1, & k\leqslant 0\\ 0, & k>0\end{cases}+\sum_{l=1}^{+\infty}3^{lm}J_l,$$

其中

$$\begin{aligned}J_l=&\int_{|\xi|=3^l}\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^1\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\&\cdot\left\{\frac{1}{6^l}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}\right)+\frac{1}{6^l}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{6^l}\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-1}\right)\right)\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-1}\right)\right\}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因 $|\xi|=3^l$, $l\in\mathbb{Z}$, 故有两种情形:

$$\xi\in\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-2}\beta^{-2}+\xi_{-1}\beta^{-1}+D,\quad \xi_{-l+1},\cdots,\xi_{-1}\in\{0,1,2\}$$

与

$$\xi\in 2\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-2}\beta^{-2}+\xi_{-1}\beta^{-1}+D,\quad \xi_{-l+1},\cdots,\xi_{-1}\in\{0,1,2\},$$

这样

$$\begin{aligned}&\int_{\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}+D}\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^1\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\&\cdot\left\{\frac{1}{6^l}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}\right)+\frac{1}{6^l}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{6^l}\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-1}\right)\right)\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-1}\right)\right\}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi\\=&\frac{1}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\prod_{j=1}^{l-1}\left(1+\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\right)\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\chi\left(\left(\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}\right)x\right)\begin{cases}1, & k\leqslant 0,\\ 0, & k>0,\end{cases}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\int_{2\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}+D}\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0\right)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^1\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-2}\right)\right)\\&\cdot\left\{\frac{1}{6^l}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}\right)+\frac{1}{6^l}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-2}+2\beta^{l-1}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{6^l}\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-1}\right)\right)\overline{\chi}_\xi\left(\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^{l-1}\right)\right\}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi\\=&\frac{1}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\overline{\omega}\right)\prod_{j=1}^{l-1}\left(1+\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\right)\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\chi\left(\left(2\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}\right)x\right)\begin{cases}1, & k\leqslant 0,\\ 0, & k>0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以, 对于 $k>0$, 有 $J_l=0$; 对于 $k\leqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}J_l=&\frac{1}{6^l}\sum_{\xi_{-l+1},\cdots,\xi_{-1}\in\{0,1,2\}}\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\prod_{j=1}^{l-1}\left(1+\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\right)\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\\&\cdot\chi\left(\left(\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}\right)x\right)\\&+\frac{1}{6^l}\sum_{\xi_{-l+1},\cdots,\xi_{-1}\in\{0,1,2\}}\left(\frac{1}{2}+\overline{\omega}\right)\prod_{j=1}^{l-1}\left(1+\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\right)\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\\&\cdot\chi\left(\left(2\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}\right)x\right)\\=&\frac{1}{6^l}\sum_{\xi_{-l+1},\cdots,\xi_{-1}\in\{0,1,2\}}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\\&\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(1+\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\right)\overline{\omega}^{\xi_{-j}}\chi\left(\left(\beta^{-l}+\xi_{-l+1}\beta^{-l+1}+\cdots+\xi_{-1}\beta^{-1}\right)x\right)\\=&\frac{1}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\chi\left(\beta^{-l}x\right)\\&\cdot\sum_{\xi_{-l+1},\cdots,\xi_{-1}\in\{0,1,2\}}\prod_{j=1}^{l-1}\left(\overline{\omega}^{\xi_{-j}}+\overline{\omega}^{2\xi_{-j}}\right)\chi\left(\beta^{-j}x\right)^{\xi_{-j}}\\=&\frac{1}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\dot{\overline{\omega}}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\chi\left(\beta^{-l}x\right)\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi\left(\beta^{-j}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right).\end{aligned}$$

总结以上计算, 得到当 $k>0$ 时, 有 $\left(\langle\xi\rangle^m\vartheta^\wedge(\xi)\right)^\vee(x)=0$; 当 $k\leqslant 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left(\langle\xi\rangle^m\vartheta^\wedge(\xi)\right)^\vee(x)=&\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\chi\left(\beta^{-l}x\right)\\&\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi\left(\beta^{-j}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right),\end{aligned}$$

于是得到 Cantor 型三分函数的 p 型导数的形式级数表示:

$$\begin{aligned}\vartheta^{\langle m\rangle}(x)=&\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\chi\left(\beta^{-l}x\right)\\&\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi\left(\beta^{-j}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right).\end{aligned}$$

由于 $\forall x\in D$, 级数

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\chi\left(\beta^{-l}x\right)$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi\left(\beta^{-j}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right) \tag{5.3.3}$$

当 $m<\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\left|\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi(\beta^{-l}x)+\overline{\omega}\chi(\beta^{-l}x)\right)\chi(\beta^{-l}x)\right.\\&\qquad\left.\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(2-\chi(\beta^{-j}x)-\chi^2(\beta^{-j}x))\right|\\&\leqslant c\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}3^l\leqslant c\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{3^m}{2}\right)^l<+\infty;\end{aligned}$$

当 $m=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ 时, 取 $x=\beta^0+\beta^1+\cdots$, 则

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi(\beta^{-l}x)+\overline{\omega}\chi(\beta^{-l}x)\right)\chi(\beta^{-l}x)\right.\\&\qquad\left.\left.\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(2-\chi(\beta^{-j}x)-\chi^2(\beta^{-j}x))\right\}\right|_{x=\beta^0+\beta^1+\cdots}\\&=\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{2^l}{6^l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\omega+\overline{\omega}\omega\right)\omega 3^{l-1}=-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{2^l3^l}{6^l}=-\infty.\end{aligned}$$

这样就证明了 Cantor 型三分函数 $\vartheta(x)$ 是 m 次 p 型可导的, 这里 $m<\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, 且对于 $x\in D$, 有

$$\begin{aligned}\vartheta^{\langle m\rangle}(x)=&\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\\&\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi\left(\beta^{-j}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right);\end{aligned}$$

对于 $x\notin D$, 有 $\vartheta^{\langle m\rangle}(x)=0$.

对于 $\vartheta(x)$ 的无穷次 p 型可积性, 由 $\vartheta_{\langle -m\rangle}(x)=\vartheta^{\langle m\rangle}(x)$, 以及级数 (5.3.3) 对 $m\leqslant 0$ 的收敛性得到. 定理得证.

3. $\vartheta^{\langle m\rangle}(x)$ 的 Hausdorff 维数

下面求 $\vartheta^{\langle m\rangle}(x)$ 的 Hausdorff 维数.

引理 5.3.3 若存在正整数 $L\in\mathbb{N}$, 使得 $\chi\left(\beta^{-L}x\right)=1$, 则 $\forall l\geqslant L$, 有

$$P_l=\frac{3^{lm}}{6^l}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\right)\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi\left(\beta^{-j}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-j}x\right)\right)=0.$$

证 因 $\chi\left(\beta^{-L}x\right)=1$, 故

$$\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi\left(\beta^{-l}x\right)+\overline{\omega}\chi\left(\beta^{-l}x\right)=0,$$

从而 $P_L=0$. 另一方面, 当 $l>L$ 时, 有

$$\left(2-\chi\left(\beta^{-L}x\right)-\chi^2\left(\beta^{-L}x\right)\right)=0,$$

故也有 $P_l=0$. 引理得证.

为研究分形函数的维数, 下面定义分形函数的 "图".

定义 5.3.1(分形函数的图) 对于定义在局部域 K_p 中的集 $A\subset K_p$ 上的分形函数 $f:A\to\mathbb{R}$, 称集合

$$\mathbb{G}(f,A)\equiv\mathbb{G}\{\{f(x):x\in A\},A\}\subset\mathbb{R}\times K_p$$

为分形函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 的图.

现在证明一个有意思的定理.

定理 5.3.2 对于 $-\infty<m<\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, 函数 $\vartheta^{\langle m\rangle}(x),\ x\in D$,

$$\vartheta^{\langle m\rangle}(x)=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{3^{lm}}{6^l}\chi(\beta^{-l}x)\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\chi(\beta^{-l}x)+\overline{\omega}\chi(\beta^{-l}x)\right)\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(2-\chi(\beta^{-j}x)-\chi^2(\beta^{-j}x)\right)$$

的图 $\mathbb{G}\left(\vartheta^{\langle m\rangle},D\right)$ 的 Hausdorff 维数为 1.

证 记 $D=\bigcup\limits_{j_1,\cdots,j_k\in\{1,2\}}I_{j_1,\cdots,j_k,0}$, 其中

$$I_0=0\cdot\beta^0+B^1,\quad I_{1,0}=1\cdot\beta^0+0\cdot\beta^1+B^2,\quad I_{2,0}=2\cdot\beta^0+0\cdot\beta^1+B^2;$$

$$\cdots\cdots$$

$$I_{j_1,\cdots,j_k,0}=j_1\cdot\beta^0+j_2\cdot\beta^1+\cdots+j_k\cdot\beta^{k-1}+0\cdot\beta^k+B^{k+1},$$

$$\cdots\cdots$$

由 P_l 的定义得到

$$\vartheta^{\langle m\rangle}(x)=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{+\infty}P_l.$$

因此, 若 $x\in I_{j_1,\cdots,j_k,0}=j_1\cdot\beta^0+j_2\cdot\beta^1+\cdots+j_k\cdot\beta^{k-1}+0\cdot\beta^k+B^{k+1}$, 则

$$\chi\left(\beta^{-(k+1)}x\right)=1.$$

据引理 5.3.3, 得到

$$\begin{aligned}\vartheta^{\langle m\rangle}(x)&=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{+\infty}P_l=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{k}P_l\\&=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{k}\omega^{j_l}\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}\omega^{j_l}+\overline{\omega}\omega^{j_l}\right)\prod_{s=1}^{l-1}\left(2-\omega^{j_s}-\omega^{2j_s}\right),\end{aligned}$$

于是, $\vartheta^{\langle m\rangle}(x)$ 在每个 $I_{j_1,\cdots,j_k,0}$ 上取常数, $j_1,\cdots,j_k\in\{1,2\}$, $k\geqslant 0$.

由于 $\mathbb{G}(\vartheta^{\langle m\rangle},I_{j_1,\cdots,j_k,0})=I_{j_1,\cdots,j_k,0}\times\{c_{j_1,\cdots,j_k}\}$, 其中 $c_{j_1,\cdots,j_k}$ 是仅与 $j_1,\cdots,j_k$ 有关的常数, 又因

$$\begin{aligned}&H^1(\mathbb{G}(\vartheta^{\langle m\rangle},I_{j_1,\cdots,j_k,0}))\\&=\lim_{\delta\to 0}H^1_\delta\left(\mathbb{G}\left(\vartheta^{\langle m\rangle},I_{j_1,\cdots,j_k,0}\right)\right)\\&=\lim_{\delta\to 0}\inf\left\{\sum_{j=1}^{+\infty}|U_j|_d:\{U_j\}_{j=1}^{+\infty}\text{ 是 }\mathbb{G}\left(\vartheta^{\langle m\rangle},I_{j_1,\cdots,j_k,0}\right)\text{ 的 }\delta\text{ 覆盖}\right\}\\&=\lim_{\delta\to 0}\inf\left\{\sum_{j=1}^{+\infty}|U_j|_d:\{U_j\}_{j=1}^{+\infty}\text{ 是 }I_{j_1,\cdots,j_k,0}\text{ 的 }\delta\text{ 覆盖}\right\}=3^{-(k+1)},\end{aligned}$$

从而得到: $\forall j_1,\cdots,j_k\in\{1,2\},k\geqslant 0$,

$$\dim_H(\mathbb{G}(\vartheta^{\langle m\rangle},I_{j_1,\cdots,j_k,0}))=1.$$

因此

$$\begin{aligned}\dim_H\mathbb{G}(\vartheta^{\langle m\rangle},D)&=\dim_H\mathbb{G}\left(\vartheta^{\langle m\rangle},\bigcup_{j_1,\cdots,j_k\in\{1,2\},k\geqslant 0}I_{j_1,\cdots,j_k,0}\right)\\&=\sup_{j_1,\cdots,j_k\in\{1,2\},k\geqslant 0}\dim_H\mathbb{G}(\vartheta^{\langle m\rangle},I_{j_1,\cdots,j_k,0})=1,\end{aligned}$$

定理得证.

5.3.3 K_p 上的 Weierstrass 型函数的 p 型导数与积分

1. K_p 上的 Weierstrass 型函数

著名的 Weierstrass 函数是 $\mathbb{R}$ 上定义的典型的分形函数, 在局部域 K_p 上, 也可以定义这样类型的函数. 下面以 K_2 为例.

对于每个 $x \in K_2$, $x = \sum_{j=s}^{+\infty} x_j \beta^j$, $x_j \in \{0,1\}$, $j = s, s+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots$, $|\beta| = 2^{-1}$, 函数

$$W_2(x) = W_2\left(\sum_{j=s}^{+\infty} x_j \beta^j\right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \left(\frac{1}{2}\right)^j, & x \in B^1, \\ 0, & x \notin B^1 \end{cases} \tag{5.3.4}$$

称为Weierstrass 型函数.

2. Weierstrass 型函数的 p 型可积性与 p 型可导性

Weierstrass 型函数有如下性质:

定理 5.3.3 Weierstrass 型函数 $W_2 : K_2 \to \mathbb{R}$ 是无穷次 p 型可积的; 对于 $m < 1, W_2(x)$ 是 m 次 p 型可导的, 并且有

$$W_2^{\langle m \rangle}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{2^m}{4} - \frac{2^{2m-2}}{1-2^{m-1}} + \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-(j+1)m}, & x \in B^1, \\ \frac{1}{4} - \frac{2^m}{4}, & x \in D \backslash B^1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

进而, $W_2(x)$ 在 B^1 中的任一点 $x \in B^1$ 没有 1 阶 p 型导数.

证 类似于定理 5.3.1 的证明, 也分为三步.

第一步. 求 $W_2^{\wedge}(\xi) = \int_{B^1} W_2(x) \overline{\chi}_\xi(x) \mathrm{d}x$, $|\xi| = 2^l$, $l \in \mathbb{Z}$.

① 对于 $l \leqslant 1$: $\forall x \in B^1$ 有 $|\xi x| \leqslant 1$, 则 $\overline{\chi}_\xi(x)\big|_{B^1} = 1$, 故

$$\begin{aligned} W_2^{\wedge}(\xi) &= \int_{B^1} W_2(x) \mathrm{d}x = \int_{B^2} W_2(x) \mathrm{d}x + \int_{B^1 \backslash B^2} W_2(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{B^2} W_2(x) \mathrm{d}x + \int_{\beta^1 + B^2} W_2(x) \mathrm{d}x = \int_{B^2} W_2(x) \mathrm{d}x + \int_{B^2} W_2(x+\beta) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到, $\forall x \in B^2$, 有 $W_2(x+\beta) = W_2(x) + W_2(\beta) = W_2(x) + \frac{1}{2}$, 故

$$W_2^{\wedge}(\xi) = 2\int_{B^2} W_2(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{B^2} \mathrm{d}x = 2\int_{B^2} W_2(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{8}.$$

另一方面, $\forall x \in B^2$, 有 $W_2\left(x\beta^{-1}\right) = 2W_2(x)$, 于是

$$W_2^{\wedge}(\xi) = \int_{B^1} W_2(x)\mathrm{d}x = \int_{B^2} W_2\left(x\beta^{-1}\right)\mathrm{d}\left(x\beta^{-1}\right) = 4\int_{B^2} W_2(x)\mathrm{d}x.$$

综上可得, 对于 $l \leqslant 1$, 有

$$W_2^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{4}.$$

② 对于 $l \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} W_2^{\wedge}(\xi) &= \int_{B^1} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{B^2} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \int_{B^2} W_2(x+\beta)\,\overline{\chi}_\xi(x+\beta)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\int_{B^2} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\overline{\chi}_\xi(\beta)\int_{B^2}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由公式

$$\int_{B^k}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2^{-k}, & l \leqslant k, \\ 0, & l > k, \end{cases}$$

便得

$$W_2^{\wedge}(\xi) = \left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\int_{B^2} W_2(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\overline{\chi}_\xi(\beta)\begin{cases} 2^{-2}, & l = 2, \\ 0, & l > 2. \end{cases}$$

为计算上式中的积分, 当 $k \leqslant l-1$ 时, 有

$$\int_{B^k} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{B^{k+1}} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \int_{B^{k+1}} W_2(x+\beta^k)\overline{\chi}_\xi(x+\beta^k)\mathrm{d}x.$$

注意到, $\forall x \in B^{k+1}$, 有

$$W_2(x+\beta^k) = W_2(x) + W_2(\beta^k) = W_2(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

故

$$\begin{aligned} &\int_{B^k} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &= \left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^k\right)\right)\int_{B^{k+1}} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2^k}\overline{\chi}_\xi\left(\beta^k\right)\int_{B^{k+1}}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &= \left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^k)\right)\int_{B^{k+1}} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2^k}\overline{\chi}_\xi(\beta^k)\begin{cases} 2^{-k-1}, & l = k+1, \\ 0, & l > k+1 \end{cases} \\ &= \left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^k\right)\right)\int_{B^{k+1}} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x + \overline{\chi}_\xi(\beta^k)\begin{cases} 2^{-2k-1}, & l = k+1, \\ 0, & l > k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

归纳地, 对于 $l \geqslant 2$ 有

$$\begin{aligned} W_2^{\wedge}(\xi) &= \int_{B^1} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &= (1+\overline{\chi}_\xi(\beta))\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2}))\int_{B^{l-1}} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &= \left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-1}))\int_{B^l} W_2(x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2}))\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-1})\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1}. \end{aligned}$$

继而, 对于 $|\xi| = 2^l$, 蕴含 $|\xi\beta^{l-1}| = 2$, 故 $\xi\beta^{l-1} \in B^{-1}\backslash D$. 这样, $\xi\beta^{l-1} \in \beta^{-1} + D$, 因此, 据 $\chi_\xi\left(\beta^{l-1}\right) = \chi\left(\xi\beta^{l-1}\right) = \chi\left(\beta^{-1}\right) = -1$, 可将 $W_2^{\wedge}(\xi)$ 简化为

$$W_2^{\wedge}(\xi) = -\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2}))\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1}.$$

综上所计算, 得到

$$W_2^{\wedge}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & l \leqslant 1, \\ -\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-2}\right)\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2l-1}, & l \geqslant 2. \end{cases}$$

第二步. 求 $\langle\xi\rangle^m W_2^{\wedge}(\xi)$, $m \in \mathbb{R}$. 直接可得

$$\langle\xi\rangle^m W_2^{\wedge}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & l \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{4}2^m, & l = 1, \\ -\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^{l-2}\right)\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2l-1} 2^{lm}, & l \geqslant 2. \end{cases}$$

第三步. 求 $\left(\langle\xi\rangle^m W_2^{\wedge}(\xi)\right)^{\vee}(x)$, $m \in \mathbb{R}$. 假设 $|x| = 2^k, k \in \mathbb{Z}$, 则

$$\begin{aligned} \left(\langle\xi\rangle^m W_2^{\wedge}(\xi)\right)^{\vee}(x) &= \frac{1}{4}\int_{|\xi|\leqslant 1} \chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{4}2^m \int_{|\xi|=2^1} \chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \sum_{l=2}^{+\infty}\int_{|\xi|=2^l}\Big\{ -\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^2)\right) \\ &\qquad \cdots(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2}))\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1} 2^{lm}\Big\}\chi_\xi(x)\,\mathrm{d}\xi \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

这里

$$J_1=\frac{1}{4}\int_{|\xi|\leqslant 1}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{4}\begin{cases}1, & k\leqslant 0,\\ 0, & k>0,\end{cases}$$

$$J_2=\frac{1}{4}2^m\int_{|\xi|=2^1}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi=\frac{2^m}{4}\begin{cases}1, & k\leqslant -1,\\ -1, & k=0,\\ 0, & k>0,\end{cases}$$

$$J_3=\sum_{l=2}^{+\infty}I_l,$$

其中

$$\begin{aligned}I_l&=\int_{|\xi|=2^l}\left\{-\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2})\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1}2^{lm}\right\}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi\\&=-2^{lm-2l+1}\int_{|\xi|=2^l}\left\{\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2})\right)\chi_\xi(x)\right\}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

令

$$E_l=\left\{\xi\in\Gamma_{K_2}:\ |\xi|=2^l,\ \chi_\xi(\beta)=\chi_\xi\left(\beta^2\right)=\cdots=\chi_\xi(\beta^{l-2})=1\right\},$$

并注意到, $\chi_\xi(\beta),\chi_\xi\left(\beta^2\right),\cdots,\chi_\xi(\beta^{l-2})$ 仅取 $+1$ 或 -1, 故

$$\begin{aligned}I_l&=-2^{lm-2l+1}\int_{|\xi|=2^l}\left\{\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta)\right)\left(1+\overline{\chi}_\xi\left(\beta^2\right)\right)\cdots\left(1+\overline{\chi}_\xi(\beta^{l-2})\right)\chi_\xi(x)\right\}\mathrm{d}\xi\\&=-2^{lm-l-1}\int_{E_l}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

但 $E_l=\beta^{-l}+B_{-1}$, 故

$$\begin{aligned}I_l&=-2^{lm-l-1}\int_{E_l}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi=-2^{lm-l-1}\int_{\beta^{-l}+B^{-1}}\chi_\xi(x)\mathrm{d}\xi\\&=-2^{lm-l-1}\int_{B^{-1}}\chi_{\beta^{-l}+\eta}(x)\mathrm{d}\eta=-2^{lm-l-1}\chi\left(\beta^{-l}x\right)\int_{B^{-1}}\chi_\eta(x)\mathrm{d}\eta\\&=-2^{lm-l-1}\chi(\beta^{-l}x)\begin{cases}2, & k\leqslant -1\\ 0, & k>-1\end{cases}=\begin{cases}-2^{lm-l}\chi\left(\beta^{-l}x\right), & k\leqslant -1,\\ 0, & k>-1.\end{cases}\end{aligned}$$

归纳以上结果, 得到

$$\left(\langle\xi\rangle^m W_2^\wedge(\xi)\right)^\vee(x)=J_1+J_2+\sum_{l=2}^{+\infty}I_l.$$

这样, 由 $\forall x\in B_1$, $x=\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\beta^j$, $x_j\in\{0,1\}$, $j\in\mathbb{N}$, 以及

$$\chi\left(\beta^{-l}x\right)=\chi\left(x_{-1+l}\beta^{-1}\right)=(-1)^{x_{l-1}}=1-2x_{l-1},$$

就得到

$$W_2^{\langle m\rangle}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{2^m}{4}+\displaystyle\sum_{l=2}^{+\infty}(-2^{lm-l}(1-2x_{l-1})), & x\in B^1,\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{2^m}{4}, & x\in D\backslash B^1,\\ 0, & x\notin D.\end{cases}$$

考虑上式中的项 $\sum\limits_{l=2}^{+\infty}\left(-2^{lm-l}\left(1-2x_{l-1}\right)\right)$, 若 $m\geqslant 1$, 由于 $-2^{lm-l}\left(1-2x_{l-1}\right)$ 取值于二值集 $\{1,-1\}$, 故

$$\lim_{l\to+\infty}\left\{-2^{lm-l}\left(1-2x_{l-1}\right)\right\}\neq 0.$$

因此对于任意 $m\geqslant 1$, 级数 $\sum\limits_{l=2}^{+\infty}(-2^{lm-l}(1-2x_{l-1}))$ 在 B^1 的任一点都不收敛; 另一方面, 当 $m<1$ 时,

$$\sum_{l=2}^{+\infty}|-2^{lm-l}(1-2x_{l-1})|\leqslant\sum_{l=2}^{+\infty}2^{lm-l}=\sum_{l=2}^{+\infty}\left(2^{m-1}\right)^l<+\infty.$$

这样, 级数 $\sum\limits_{l=2}^{+\infty}\left(-2^{lm-l}\left(1-2x_{l-1}\right)\right)$ 绝对收敛, 当且仅当 $m<1$.

最后, 当 $m<1$ 时, 有

$$W_2^{\langle m\rangle}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{2^m}{4}-\dfrac{2^{2m-2}}{1-2^{m-1}}+\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-(j+1)m}, & |x|\leqslant 2^{-1},\text{即 } x\in B^1,\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{2^m}{4}, & |x|=1,\text{即 } x\in D\backslash B^1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定理得证.

定理 5.3.4 Weierstrass 型函数 $W_2: K_2\to\mathbb{R}$, $x=\sum\limits_{j=s}^{+\infty}x_j\beta^j$, $s\in\mathbb{Z}$,

$$W_2(x)=W_2\left(\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\beta^j\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{2}\right)^j, & x\in B^1,\\ 0, & x\notin B^1\end{cases}$$

是 $x\in B^1$ 的连续函数.

证　$\forall x=\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\beta^j\in B^1$ 与 $\forall\varepsilon>0$, 取 $K=\left[\log_{\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{4}\right]$, 则 $\forall k>K$, $\forall y\in B^k$,

$$|W_2(x+y)-W_2(x)|\leqslant\sum_{j=k}^{+\infty}2\left(\frac{1}{2}\right)^k=4\left(\frac{1}{2}\right)^k<\varepsilon,$$

故 $W_2(x)$ 的连续性得证.

从以上定理可以断言, Weierstrass 型函数 W_2 的性质: $W_2:K_2\to\mathbb{R}$ 是连续的、无穷次 p 型可积的、m 次 $(0\leqslant m<1)$ p 型可导的, 但没有 1 阶 p 型导数.

现在可以将 (5.3.4) 式中定义的 $W_2:K_2\to\mathbb{R}$ 扩张为

$$W_2(x)=W_2\left(\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\beta^j\right)=\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{2}\right)^j=\sum_{j=s}^{0}x_j\left(\frac{1}{2}\right)^j+\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

进而, 对于 K_p, 定义 Weierstrass 型函数 $W_p:K_p\to\mathbb{C}$,

$$W_p(x)=W_p\left(\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\beta^j\right)=\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{p}\right)^j,$$

其中 $x=\sum_{j=s}^{+\infty}x_j\beta^j$, $x_j\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $j=s,s+1,\cdots$, $s\in\mathbb{Z}$, $|\beta|=p^{-1}$.

对于 $W_p(x)$, 定理 5.3.3 与定理 5.3.4 都成立 [40], 但 $W_p^{\langle m\rangle}(x)$ 的表示式要复杂得多

3. Weierstrass 型函数的 p 型微积分的例

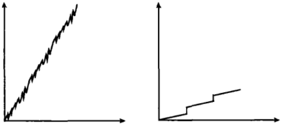
下面给出 Weierstrass 型函数 $W_2(x)$ 的 p 型微积分的特例.

(1) $W_2^{\langle 0\rangle}(x)=W_2(x)$.

(2) $$W_2^{\langle\frac{1}{2}\rangle}(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j, & x\in B^1,\\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}, & x\in D\backslash B^1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $$(W_2)_{\langle 1\rangle}(x)=\begin{cases}\dfrac{7}{24}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}x_j\left(\frac{1}{4}\right)^j, & x\in B^1,\\ \dfrac{1}{8}, & x\in D\backslash B^1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

图 5.3.6 是 $W_2^{\langle\frac{1}{2}\rangle}(x), (W_2)_{\langle 1\rangle}(x)$ 的示意图.



$W_2^{\langle\frac{1}{2}\rangle}(x)$ $(W_2)_{\langle 1\rangle}(x)$

图 5.3.6

5.3.4 K_p 上的第二型 Weierstrass 型函数的 p 型导数与积分

1. 第二型 Weierstrass 型函数

局部域 K_p 上还有另一种定义 Weierstrass 型函数的方式, 是受经典情形的启示. 回忆 $\mathbb{R}^1$ 上的 Weierstrass 函数

$$W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \cos(\beta^k \pi x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha\beta > 1 + \frac{\pi}{2}(1-\alpha),$$

$\cos(\beta^k \pi x) = \mathrm{Re}(e^{\beta^k \pi x i})$ 启发我们考虑 K_p 的特征 $\chi_\xi(x)$ 的实部 $\mathrm{Re}\chi_\xi(x)$, 并定义

$$W(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^{(s-2)k} \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x), \quad 1 \leqslant s < 2, x \in D \tag{5.3.5}$$

为第二型 Weierstrass 型函数

图 5.3.7 是当 $p=3, s=1.50; p=5, s=1.55; p=7, s=1.55; p=11, s=1.45$ 的 $W(x)$ 的示意图.

2. 第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$ 的 p 型可积性与 p 型可导性

现在研究第二型 Weierstrass 型函数 $W(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p^{(s-2)k} \mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right), 1 \leqslant s < 2.$

引理 5.3.4 定义在 $D \subset K_p$ 上的函数 $\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$, 对于 $k \geqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, 有

$$\left\{\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)\right\}^{\langle m\rangle} = p^{km}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right), x \in D.$$

证 ① 首先计算 $\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$ 的 Fourier 变换. $\forall x \in D$, $x = x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + \cdots$, 以及 $|\xi| = p^l$, $l \in \mathbb{Z}$, 有

$$\Theta \equiv \int_D \mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_D \cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p}\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \left(\cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p} \sum_{0\leqslant x_i<p, 0\leqslant i\leqslant k-2} \int_{x_0\beta^0+x_1\beta^1+\cdots+x_{k-1}\beta^{k-1}+B^k} \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \left(\cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p} \sum_{0\leqslant x_i<p, 0\leqslant i\leqslant k-2} \overline{\chi}_\xi(x_0\beta^0+x_1\beta^1+\cdots+x_{k-1}\beta^{k-1}) \int_{B^k} \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \left(\cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p} \sum_{0\leqslant x_i<p, 0\leqslant i\leqslant k-2} \overline{\chi}_\xi(x_0\beta^0+x_1\beta^1+\cdots+x_{k-1}\beta^{k-1}) p^{-k} \right) \quad (l\leqslant k) \\
&= \sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \left(\cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p} \sum_{0\leqslant x_i<p, 0\leqslant i\leqslant k-2} (\overline{\chi}_\xi(\beta^0))^{x_0} (\overline{\chi}_\xi(\beta^1))^{x_1} \cdots (\overline{\chi}_\xi(\beta^{k-1}))^{x_{k-1}} p^{-k} \right),
\end{aligned}
$$

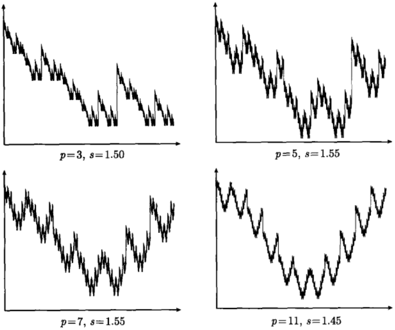


图 5.3.7

这里用到了基本积分

$$
\int_{B^k} \overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} p^{-k}, & l\leqslant k, \\ 0, & l>k, \end{cases}
$$

因此, $\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)$ 的 Fourier 变换当 $l>k$ 时为 0. 对于 $l\leqslant k$, 分析如下.

由于当 $0\leqslant i\leqslant k-2$ 时,

$$
\xi_{-(i+1)} \neq 0 \Rightarrow \chi_\xi(\beta^i) \neq 1 \Rightarrow \sum_{0\leqslant x_i<p} (\overline{\chi}_\xi(\beta^i))^{x_i} = 0,
$$

$$\xi_{-(i+1)} = 0 \Rightarrow \chi_\xi(\beta^i) = 1 \Rightarrow \sum_{0\leqslant x_i<p} (\overline{\chi}_\xi(\beta^i))^{x_i} = p,$$

因此, 对于 $l \leqslant k$, 若 $\xi_{-1} = \cdots = \xi_{-(k-1)} = 0$, 则

$$\int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p}(\overline{\chi}_\xi(\beta^{k-1}))^{x_{k-1}},$$

否则

$$\int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

情形 1. 若 $1 \leqslant l < k$, 则不可能有 $\xi_{-1} = \cdots = \xi_{-(k-1)} = 0$, 因此

$$\int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

情形 2. 若 $l < 1$, 则必有 $\xi_{-1} = \cdots = \xi_{-(k-1)} = \xi_{-k} = 0$, 故

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{p}\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p}(\overline{\chi}_\xi(\beta^{k-1}))^{x_{k-1}} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p} = 0.\end{aligned}$$

情形 3. 若 $l=k$, 且 $\xi_{-1}=\cdots=\xi_{-(k-1)}=0$, $\xi_{-k}\neq 0$, 则 $\xi=\xi_{-k}\beta^{-k}+\xi_0\beta^0+\cdots$,

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{p}\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \cos\frac{2\pi x_{k-1}}{p}(\overline{\chi}_\xi(\beta^{k-1}))^{x_{k-1}} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \cos\frac{2\pi j}{p}\,(\overline{\omega})^{j\xi_{-k}}.\end{aligned}$$

归纳以上讨论得到, 当 $\xi = \xi_{-k}\beta^{-k} + \xi_0\beta^0 + \cdots$, $\xi_{-k} \neq 0$ 时, 有

$$\Theta = \int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \cos\frac{2\pi j}{p}\,(\overline{\omega})^{j\xi_{-k}},$$

否则

$$\Theta = \int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)\overline{\chi}_\xi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

② 计算 $\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$ 的 p 型积分与导数

$$(\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x))^{\langle m\rangle} = \int_{\Gamma_p} \langle\xi\rangle^m \left\{\int_D \mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}y)\overline{\chi}_\xi(y)\mathrm{d}y\right\} \chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{t=1}^{p-1}p^{km-1}\left\{\int_{t\beta^{-k}+D}\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}(\overline{\omega})^{tj}\chi_x(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\\
&=\sum_{t=1}^{p-1}p^{km-1}\left\{\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}(\overline{\omega})^{tj}\chi_x\left(t\beta^{-k}\right)\right\}\int_D\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\sum_{t=1}^{p-1}p^{km-1}\left\{\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}(\overline{\omega})^{tj}\chi_x\left(t\beta^{-k}\right)\right\}\quad(x\in D)\\
&=\sum_{t=1}^{p-1}p^{km-1}\left\{\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}(\overline{\omega})^{tj}\left(\chi\left(\beta^{-k}x\right)\right)^t\right\}\\
&=p^{km-1}\sum_{t=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}(\overline{\omega})^{tj}\left(\chi\left(\beta^{-k}x\right)\right)^t\right\}\\
&=p^{km-1}\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}\sum_{t=1}^{p-1}(\overline{\omega})^{tj}\left(\chi\left(\beta^{-k}x\right)\right)^t.
\end{aligned}
$$

注意到, 当 $0\leqslant j<p$ 时, 若 $\chi\left(\beta^{-k}x\right)=\omega^j$, 则

$$
\sum_{t=1}^{p-1}(\overline{\omega})^{tj}\left(\chi\left(\beta^{-k}x\right)\right)^t=p-1;
$$

否则

$$
\sum_{t=1}^{p-1}(\overline{\omega})^{tj}\left(\chi\left(\beta^{-k}x\right)\right)^t=-1.
$$

于是, 当 $x\in D$ 时, $k\geqslant 1, m\in\mathbb{R}$,

$$
(\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x))^{\langle m\rangle}=p^{km-1}\left(p\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)-\sum_{j=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi j}{p}\right)=p^{km}\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x),
$$

引理得证.

定理 5.3.5 第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)$, $1\leqslant s<2$, $x=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}x_j\beta^j$, 是无穷次 p 型可积的; m 次 $(m<2-s)$ p 型可导的, 并且

$$
W^{\langle m\rangle}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{(s+m-2)k}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right).
$$

由引理与级数的收敛性便得定理的证明.

不难看出, Weiestrass 型函数 $W_2(x)$ 是第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$ 的特例, 只需取 $p=2,\ s=1$.

图 5.3.8 中给出的是 $p=5, s=1.45$ 的 $W(x), W^{<0.3>}(x), W_{<0.2>}(x)$ 的图形.

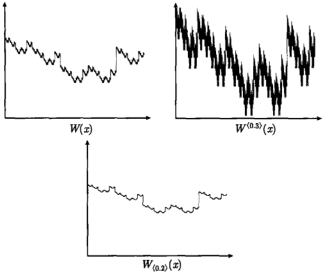


图 5.3.8

3. 第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$ 图的维数

本小节研究第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right), 1\leqslant s<2$ 的图$\mathbb{G}\left(W\left(x\right),D\right)$ 的盒维数、填充维数与 Hausdorff 维数.

首先给出三个引理.

引理 5.3.5 对于第二型 Weierstrass 型函数 $W\left(x\right)$, 当 $p=2$ 时,

$$\sup_{x\in D}W\left(x\right)=W\left(0\right)=\frac{2^{s-2}}{1-2^{s-2}},$$

$$\inf_{x\in D}W\left(x\right)=W\left(\beta^0+\beta^1+\cdots\right)=\frac{-2^{s-2}}{1-2^{s-2}};$$

当 $p>2$ 时, 有

$$\sup_{x\in D}W\left(x\right)=W\left(0\right)=\frac{p^{s-2}}{1-p^{s-2}},$$

$$\inf_{x\in D}W\left(x\right)=W\left(\frac{p-1}{2}\beta^0+\frac{p-1}{2}\beta^1+\cdots\right)=\frac{p^{s-2}}{1-p^{s-2}}\cos\frac{(p-1)\pi}{p}.$$

证 由第二型 Weierstrass 型函数

$$W(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\cos\left(\frac{2\pi}{p}x_{k-1}\right)$$

可得.

引理 5.3.6 对于第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$, 当 $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in y+B^n$, $y=y_0\beta^0+y_1\beta^1+\cdots+y_{n-1}\beta^{n-1}$ 时, 有

$$W(x)-W(y)=p^{(s-2)n}\left(W\left(\beta^{-n}\left(x-y\right)\right)-W(0)\right).$$

证 $\forall x\in y+B^n$, 有

$$\begin{aligned}W(x)&=\sum_{k=1}^{n}p^{(s-2)k}\cos\left(\frac{2\pi}{p}y_{k-1}\right)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\cos\left(\frac{2\pi}{p}x_{k-1}\right)\\&=W(y)-\sum_{k=n+1}^{+\infty}p^{(s-2)k}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\cos\left(\frac{2\pi}{p}x_{k-1}\right)\\&=W(y)-\frac{p^{(s-2)(n+1)}}{1-p^{s-2}}+p^{(s-2)n}\sum_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\cos\left(\frac{2\pi}{p}x_{k+n-1}\right)\\&=W(y)+p^{(s-2)n}\left(W\left(\beta^{-n}(x-y)\right)-\frac{p^{s-2}}{1-p^{s-2}}\right),\end{aligned}$$

再由引理 5.3.5 便得本引理.

引理 5.3.7 对于第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$, 当 $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in y+B^n$, $y=y_0\beta^0+y_1\beta^1+\cdots+y_{n-1}\beta^{n-1}$ 时, 若 $p=2$, 则

$$\sup\left\{\left|W(x)-W\left(x'\right)\right|:\ x,x'\in y+B^n\right\}=2^{(s-2)n+1}\frac{2^{s-2}}{1-2^{s-2}};$$

若 $p>2$, 则

$$\sup\left\{\left|W(x)-W\left(x'\right)\right|:\ x,x'\in y+B^n\right\}=p^{(s-2)n}\left(1-\cos\frac{(p-1)\pi}{p}\right)\frac{p^{s-2}}{1-p^{s-2}}.$$

关于 $W(x)$ 的盒维数、填充维数, 有

定理 5.3.6 对第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$, $1\leqslant s<2$, 其图 $\mathbb{G}\left(W(x),D\right)$ 的盒维数、填充维数为

$$\dim_B\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=\dim_P\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s.$$

证 只需对 $p>2$ 加以证明. 由引理 5.3.7 知

$$p^n N_n\left(\mathbb{G}\left(W(x),B^n\right)\right)=p^n\frac{p^{(s-2)n}\left(1-\cos\dfrac{(p-1)\pi}{p}\right)\dfrac{p^{s-2}}{1-p^{s-2}}}{p^{-n}}=p^{sn}.$$

因为 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$\frac{\ln\left(p^n N_n\left(\mathbb{G}\right)\right)}{\ln\left(p^n\right)}=\frac{\ln\left(p^{sn}\right)}{\ln\left(p^n\right)}=s,$$

故 $\dim_B\mathbb{G}\left(W(x),D\right)$ 存在, 且

$$\dim_B\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s.$$

由定理 5.1.9 得 $\dim_B\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=\dim_P\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s$.

为讨论第二型 Weiestrass 型函数 $W(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$, $1\leqslant s<2$ 的图 $\mathbb{G}\left(W(x),D\right)$ 的 Hausdorff 维数, 下面定义 Borel 集 $U\subset A\times\mathbb{R}\subset K_p\times\mathbb{R}$ 的 Borel 概率测度.

定义 5.3.2(Borel 概率测度) 对于定义在局部域 K_p 中的集 $A\subset K_p$ 上的实值函数 $f:A\to\mathbb{R}$, 对于积空间 $A\times\mathbb{R}$ 中的 Borel 集 $U\subset A\times\mathbb{R}$, 记

$$\nu(U)=\left|\{x\in A:(x,f(x))\in U\}\right|,$$

称 ν 为集合 U 的 Borel 概率测度.

对于 $A\subset K_p$ 上的 Borel 可测函数 $f:A\to\mathbb{R}$, 可由 $\mathbb{R}$ 上的 Haar 测度定义"像测度":

$$\mu_f(E)=\left|f^{-1}(E)\right|,\quad \forall E\subset A,$$

若 μ_f 关于 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度是绝对连续的, 则据 Radon-Nikodym 定理 [26], 存在 Borel 可测函数 $\alpha_f:E\to\mathbb{R}$, 使得 $\mu_f(E)=\int_E\alpha_f(x)\mathrm{d}x$.

定理 5.3.7 对第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$, $1\leqslant s<2$, 若其像测度 μ_W 绝对连续, 从而 $\alpha_W(x)$ 存在, 且 $\alpha_W\in L^\infty(D)$, 则图 $\mathbb{G}\left(W(x),D\right)$ 的 Hausdorff 维数为

$$\dim_H\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s.$$

证 固定 $y=y_0\beta^0+\cdots+y_{n-1}\beta^{n-1}+y_n\beta^n+\cdots\in D$, $n\in\mathbb{N}$. 对于以 $D\times\mathbb{R}$ 中的点 $(y,W(y))\in D\times\mathbb{R}$ 为球心、以 p^{-n} 为半径的球 $B\left((y,W(y)),p^{-n}\right)$, 计算其

Borel 概率测度

$$\nu\left(B\left((y,W(y)),p^{-n}\right)\right)=\left|\left\{x\in y+B^n: W(x)\in\left(W(y)-p^{-n},W(y)+p^{-n}\right)\right\}\right|.$$

记

$$y'=y_0\beta^0+\cdots+y_{n-1}\beta^{n-1},$$
$$J=\left(W(y)-W\left(y'\right)-p^{-n},W\left(y\right)-W\left(y'\right)+p^{-n}\right),$$

则据引理 5.3.6, 有

$$\begin{aligned}\nu\left(B\left((y,W(y)),p^{-n}\right)\right)&=\left|\left\{x\in y+B^n:\ W(x)\in\left(W(y)-p^{-n},W(y)+p^{-n}\right)\right\}\right|\\&=\left|\left\{x\in y'+B^n:\ W(x)-W\left(y'\right)\in J\right\}\right|\\&=\left|\left\{x\in B^n:\ p^{(s-2)n}\left(W\left(\beta^{-n}x\right)-W(0)\right)\in J\right\}\right|\\&=p^{-n}\left|\left\{x\in D:\ p^{(s-2)n}\left(W(x)-W(0)\right)\in J\right\}\right|\\&=p^{-n}\left|\left\{x\in D:\ p^{(s-2)n}W(x)\in p^{(s-2)n}W(0)+J\right\}\right|\\&=p^{-n}\left|\left\{x\in D:\ W(x)\in p^{(2-s)n}(p^{(s-2)n}W(0)+J)\right\}\right|\\&=p^{-n}\mu_W\left(p^{(2-s)n}(p^{(s-2)n}W(0)+J)\right)\\&\leqslant 2cp^{-n}p^{(2-s)n}p^{-n}=2c(p^{-n})^s.\end{aligned}$$

由质量分布原理[5], 得到

$$\dim_H\mathbb{G}\left(W(x),D\right)\geqslant s.$$

另一方面, 由定理 5.1.7 与定理 5.3.6, 得

$$s\leqslant\dim_H\mathbb{G}\left(W(x),D\right)\leqslant\dim_B\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s,$$

定理得证.

为在条件“$\exists\alpha_W(x)\in L^r(K_p),r>1$”下证明定理 5.3.7, 还需引进两个引理, 它们的证明也包含了局部域分析的技巧. 然而, 去掉条件“$\exists\alpha_W(x)\in L^r(K_p)$, $r>1$”却并非易事. 叙述但不证明下述定理. 可参看文献 [43].

定理 5.3.8　对第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi(\beta^{-k}x)$, $1\leqslant s<2$, $x\in D$,

(1) 若 $p=2$, 则 $\dim_H\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s$, a.e. $s\in(1,2)$;

(2) 若 $p>2$, 则 $\dim_H\mathbb{G}\left(W(x),D\right)=s$, a.e. $s\in\left(\log_p(2p-1),2+\log_p y\left(b_p\right)\right)$,

这里 $b_p=\left(1-\cos\dfrac{(p-1)\pi}{p}\right)\Big/\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{p}\right)$, $y(b_p)$ 是满足 $g\left(y\left(b_p\right)\right)=g'\left(y\left(b_p\right)\right)=$

0 的最小正数, 其中 $g(x)=1+\sum_{j=1}^{+\infty} g_j x^j$, $g_j\in[-b,b]$ 是存在的一个幂级数.

4. **第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$ 的 p 型导数与 p 型积分的图的维数**

定理 5.3.9 第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} p^{(s-2)k}\mathrm{Re}\chi\left(\beta^{-k}x\right)$, $1\leqslant s<2$ 的 p 型导数的图 $\mathbb{G}\left(W^{\langle m\rangle}(x),D\right)$ 的盒维数、填充维数、Hausdorff 维数成立如下关系:

(1) $\dim_B \mathbb{G}(W^{\langle m\rangle}(x),D)=\dim_P \mathbb{G}(W^{\langle m\rangle}(x),D)=s+m$, $\forall m\in[1-s,2-s)$;

(2) 若 $p=2$, 则 $\dim_H \mathbb{G}(W^{\langle m\rangle}(x),D)=s+m$, a.e. $m\in(1-s,2-s)$;

若 $p>2$, 则 $\dim_H \mathbb{G}(W^{\langle m\rangle}(x),D)=s+m$, a.e. $m\in\left(\log_p(2p-1)-s,\ 2+\log_p y(b_p)-s\right)$.

定理的证明由定理 5.3.5、定理 5.3.6、定理 5.3.8 得到.

这个定理的意义很深刻, 它给出分形函数维数与其 p 型导数之间的线性关系, 至今仍然是分形分析中的前沿课题, 有大量值得考虑的开问题, 等待我们去研究.

思 考 题

1. 给出 Cantor 型三分集 $C_3=D\backslash\bigcup_{j=1}^{+\infty}V_j$ 的详细表示

$$C_3=D\left\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{2^k}V_{k,j}\right)\right)\right..$$

2. 用 Walsh-Fourier 级数在 K_3 中表示 Cantor 型三分函数

$$\vartheta(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{6^r}\Lambda(j_0)\cdots\Lambda(j_{-r+1})(1-\omega^{j_r})w_j(x),$$

其中 $\omega=\exp\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}$, 并且

$$\Lambda(j)=\begin{cases}2, & j=0,\\ \exp\dfrac{-2\pi\mathrm{i}}{3}j, & j=1,2.\end{cases}$$

求出这里 $j_0,j_{-1},\cdots,j_{-r+1}$ 的表示, 并且证明之.

3. 对于 $W_p(x)$, 证明定理 5.3.3 与定理 5.3.4.

4. 对于第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$, 研究其 Hausdorff 维数与 p 型导数 $W^{\langle m\rangle}(x)$ 的 Hausdorff 维数.

5. 对于 Cantor 型三分函数 $C(x)$、Weierstrass 型函数 $W_p(x)$、第二型 Weierstrass 型函数 $W(x)$, 研究其 Fourier 维数、p 型导数 $W^{\langle m\rangle}(x)$ 的 Fourier 维数, 以及它们与其他维数的关系.

第 6 章　局部域 K_p 上的分形 PDE

基于局部域为底空间的分形微分方程与分形偏微分方程是方兴未艾的全新课题.

经典意义下, 微分方程与偏微分方程在数学科学领域与自然科学领域中的作用是众所周知的, 这是由于在大自然中, 运动物体无不具有速度, 大小形体无不具有度量, 因此微积分的作用是无可代替的. 但是, 分形集合、分形函数, 在失去经典微积分这一重要工具时, 却并未失去 "运动物体速度" 与 "大小形体度量" 的实际意义. 在引进分形空间 $(\mathbb{K}(K_p), h)$ 与 p 型微积分之后, 随之而来的分形微分方程、分形偏微分方程的研究便成为重要的研究课题. 本章从特殊例子的研究开始, 进入一般分形 PDE 理论. 然而, 这仅仅是最基本的探讨, 更广泛、更深入的理论研究以及更重要与更有价值的应用研究, 都是我们在今后的研究领域中所要开展的.

6.1　特 殊 例 子

6.1.1　经典二维波动方程的分形边界问题

1. *具有分形边界的经典二维波动方程*

波动方程是三类经典二阶偏微分方程之一, 这类方程在经典偏微分方程的研究中具有典型意义, 它描述了相应的物理过程的运动规律. 经典意义下所考虑的波动方程定解问题, 其边界是光滑的或逐片光滑的, 并且获得了很完整很深刻的结果, 达到了 "数学物理方程" 研究的一个高峰.

从 2 进 von Koch 型曲线 γ 为边界的区域 D 上的二维波动方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}, & t>0, (x,y)\in D, \\ u(t,x,y)\big|_{t=0} = \varphi(x,y), & (x,y)\in D, \\ \dfrac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y), & (x,y)\in D, \\ u(t,x,y)\big|_{\gamma} = 0, & t>0 \end{cases} \tag{6.1.1}$$

开始[31],[83], 这里 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是二维区域, 以 2 进 von Koch 曲线 γ 为边界, $\gamma=\partial D$. 记分形边界 γ 的近似曲线为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k,\cdots$, 它们所围成的区域分别为

$D_1, D_2, \cdots, D_k, \cdots$, 如图 6.1.1 所示. 始值函数 $\varphi(x,y) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k(x,y), \psi(x,y) = \lim\limits_{k\to+\infty} \psi_k(x,y)$ 在 D 中收敛, 其中 φ_k, ψ_k 的定义域为 $D_k, k = 1, 2, \cdots$.

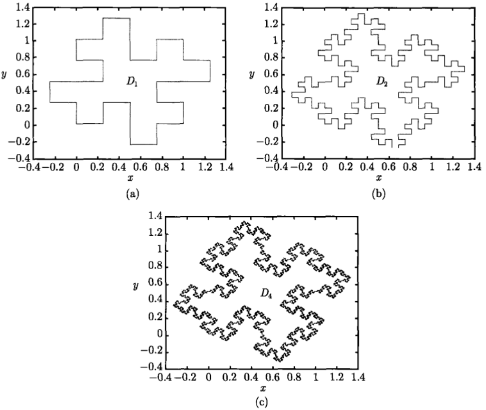


图 6.1.1

2. *具有分形边界的经典二维波动方程的解*

设定解问题 (6.1.1) 的解为 $u(t,x,y)$, 对于边界 γ, 考虑其 1 次, 2 次, $\cdots$, k 次, $\cdots$ 近似曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k, \cdots$, 分别解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial y^2}, & t > 0, (x,y) \in D_k, \\
u_k(t,x,y)\big|_{t=0} = \varphi_k(x,y), & (x,y) \in D_k, \\
\left.\dfrac{\partial u_k(t,x,y)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_k(x,y), & (x,y) \in D_k, \\
u_k(t,x,y)\big|_{\gamma_k} = 0, & t > 0.
\end{cases}
\tag{6.1.2}
$$

为解方程

$$\frac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial y^2},$$

假设

$$u_k(t,x,y)=T_k(t)\,v_k(x,y).$$

于是, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2T_k(t)}{\mathrm{d}t^2}v_k(x,y)=T_k(t)\left\{\frac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial y^2}\right\}. \tag{6.1.3}$$

若 $T_k(t)\neq 0$, $v_k(x,y)\neq 0$, 由分离变量法的常规方法[9], 式 (6.1.3) 成为

$$\frac{1}{v_k(x,y)}\left\{\frac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial y^2}\right\}=\frac{1}{T_k(t)}\frac{\mathrm{d}^2T_k(t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{6.1.4}$$

令上式右边等于 $-(\lambda^2+\mu^2)$, 其中 λ, μ 为大于零的常数, 则

$$\frac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial y^2}=-\left(\lambda^2+\mu^2\right)v_k(x,y) \tag{6.1.5}$$

与

$$\frac{\mathrm{d}^2T_k(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(\lambda^2+\mu^2\right)T_k(t)=0. \tag{6.1.6}$$

对于方程 (6.1.5), 求得它的一个特解

$$v_k(x,y)=\sin\lambda x\sin\mu y. \tag{6.1.7}$$

下面用边界条件 $v_k(x,y)|_{\gamma_k}=0$ 来确定 λ, μ.

对于 $k\in\mathbb{N}$, 考虑边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_k(x,y)}{\partial y^2}=-\left(\lambda^2+\mu^2\right)v_k(x,y), \quad (x,y)\in D_k,\\ v_k(x,y)|_{\gamma_k}=0,\end{cases} \tag{6.1.8}$$

其中 γ_k 是 von Koch 型曲线 γ 的第 k 次近似, 由 γ_k 所围成的区域为 D_k, 它是区域 D 的第 k 次近似.

① 当 $k=1$ 时. 从图 6.1.1(a) 看出, 区域 D_1 中 x 与 y 的取值范围都在 $-\dfrac{1}{4}$ 与 $\dfrac{5}{4}$ 之间, 由条件 $\sin\lambda x\sin\mu y|_{\gamma_1}=0$, 求得 (6.1.7) 中的固有值

$$\lambda=4^1m\pi,\quad m=1,2,\cdots,$$
$$\mu=4^1n\pi,\quad n=1,2,\cdots.$$

② 当 $k=2$ 时. 从图 6.1.1(b) 看出, 区域 D_2 中 x 与 y 的取值范围都在 $-\dfrac{5}{16}$ 与 $\dfrac{21}{16}$ 之间, 由条件 $\sin\lambda x\sin\mu y|_{\gamma_2}=0$, 求得 (6.1.7) 中的固有值

$$\lambda=4^2 m\pi,\quad m=1,2,\cdots,\quad k\in\mathbb{N},$$
$$\mu=4^2 n\pi,\quad n=1,2,\cdots,\quad k\in\mathbb{N}.$$

③ 一般地, 当 $k\in\mathbb{N}$ 时. 可求得 (6.1.7) 中的固有值

$$\lambda=4^k m\pi,\quad m=1,2,\cdots,\quad k\in\mathbb{N},$$
$$\mu=4^k n\pi,\quad n=1,2,\cdots,\quad k\in\mathbb{N}.$$

于是, 对于 $k\in\mathbb{N}$, 边值问题 (6.1.8) 的解为

$$v_{k,m,n}(x,y)=\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y.$$

相应地, 方程 (6.1.6) 的解为

$$T_{k,m,n}(t)=A_{k,m,n}\cos 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t+B_{k,m,n}\sin 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t,$$

其中 $A_{k,m,n}$, $B_{k,m,n}$ 是依赖于 k,m,n 的常数.

结合上述结果, 得到问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_k(t,x,y)}{\partial y^2}, & t>0,(x,y)\in D_k,\\ u_k(t,x,y)|_{\gamma_k}=0, & t>0\end{cases}$$

的形式解

$$\begin{aligned}u_k(t,x,y)&=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}T_{k,m,n}(t)\,v_{k,m,t}(x,y)\\&=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_{k,m,n}\cos 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t+B_{k,m,n}\sin 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t\right\}\\&\quad\cdot\sin 4^k m\pi x\cdot\sin 4^k n\pi y.\end{aligned}$$

这是一个缺项级数. 为确定 $A_{k,m,n}$, $B_{k,m,n}$, 假定 $\varphi_k(x,y)$ 与 $\psi_k(x,y)$ 也可展开成缺项级数

$$\varphi_k(x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}a_{m,n}^k\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y,$$
$$\psi_k(x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}b_{m,n}^k\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y,$$

且

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|a_{m,n}^{k}\right|<+\infty,\quad \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|b_{m,n}^{k}\right|<+\infty.$$

由 Fourier 级数法, 得到

$$A_{k,m,n}=4\int_{D_k}\varphi_k(x,y)\sin 4^k m\pi x 4^k n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.1.9}$$

$$B_{k,m,n}=\frac{4}{4^k\pi\sqrt{m^2+n^2}}\int_{D_k}\psi_k(x,y)\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.1.10}$$

这样, 便得到问题 (6.1.1) 的形式解

$$\begin{aligned}u(t,x,y)&=\lim_{k\to+\infty}u_k(t,x,y)\\&=\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_{k,m,n}\cos 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t+B_{k,m,n}\sin 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t\right\}\\&\qquad\cdot\sin 4^k m\pi x\cdot\sin 4^k n\pi y,\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

其中系数由 (6.1.9) 与 (6.1.10) 确定.

下面考虑 (6.1.11) 中的函数 $u(t,x,y)=\lim\limits_{k\to+\infty}u_k(t,x,y)$的可导性. 先叙述一个引理, 并证明一个预备定理.

引理 6.1.1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 有导数 $f'(x_0)$; $\eta>0$ 是常数, x_n, $\overline{x}_n$ 为满足如下条件的两个实数序列: $x_n\leqslant x_0\leqslant\overline{x}_n$ 与 $\overline{x}_n-x_n\geqslant\eta(\overline{x}_n-x_0)$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{x}_n=x_0=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\overline{x}_n)-f(x_n)}{\overline{x}_n-x_n}=f'(x_0).$$

定理 6.1.1　设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足常数为 $A>0$ 的 Lipschitz 条件的有界函数, 若对于整数 $b\geqslant 2$, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(b^kx)$, $x\in\mathbb{R}$, 绝对一致收敛, 且若存在常数 $l>0$, $\eta>0$, 以及非负常数 $a\geqslant 0$, 满足:

(1) 对于一切整数 $k\in\mathbb{Z}$, 有

$$\varphi(kl)=a, \tag{6.1.12}$$

$$\left|\varphi\left(kl+\frac{l}{b}\right)-\varphi(kl)\right|\geqslant\eta; \tag{6.1.13}$$

(2) 下述不等式成立:

$$\frac{\eta}{l}-\frac{A}{b(b-1)}>0. \tag{6.1.14}$$

则函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi\left(b^k x\right)$ 为处处不存在有限右导数与左导数的连续函数.

证 由假设, 级数 $f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi\left(b^k x\right)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 中绝对一致收敛, 因此 $f(x)$ 连续. 下面证明 $f(x)$ 处处不存在有限的右导数.

取定 $x\in\mathbb{R}$, 不妨设 $x>0$. 令 $\eta_n=\frac{l}{b^n}$. 对于任意正整数 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的正整数 N_n, 满足

$$(N_n-1)\,\eta_n\leqslant x<N_n\eta_n, \tag{6.1.15}$$

即

$$(N_n-1)\,lb^{-n}\leqslant x<N_n lb^{-n}.$$

令

$$x_n=N_n lb^{-n},\quad \overline{x}_n=\left(N_n+\frac{1}{b}\right)lb^{-n},$$

则

$$\overline{x}_n-x_n=\frac{\eta_n}{b}=\frac{l}{b^{n+1}}. \tag{6.1.16}$$

估计

$$\begin{aligned}
|f(\overline{x}_n)-f(x_n)|&=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi\left(b^k\overline{x}_n\right)-\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi\left(b^k x_n\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left[\varphi\left(b^k\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^k x_n\right)\right]+\left[\varphi\left(b^n\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^n x_n\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[\varphi\left(b^k\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^k x_n\right)\right]\right|\\
&\geqslant\left|\varphi\left(b^n\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^n x_n\right)\right|-\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left[\varphi\left(b^k\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^k x_n\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[\varphi\left(b^k\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^k x_n\right)\right]\right|,
\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

由 Lipschitz 条件与 (6.1.16) 知, 当 $k<n$ 时, 有

$$\left|\varphi\left(b^k\overline{x}_n\right)-\varphi\left(b^k x_n\right)\right|\leqslant\frac{Alb^k}{b^{n+1}}; \tag{6.1.18}$$

当 $k=n$ 时, 由 (6.1.13), 有

$$\begin{aligned}|\varphi(b^n\overline{x}_n)-\varphi(b^n x_n)| &= \left|\varphi\left(b^n\left(N_n+\frac{1}{b}\right)lb^{-n}\right)-\varphi\left(b^n N_n lb^{-n}\right)\right| \\ &= \left|\varphi\left(N_n l+\frac{l}{b}\right)-\varphi(N_n l)\right| \geqslant \eta; \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

当 $k\geqslant n+1$ 时, $b^k x_n = b^k N_n lb^{-n} = \left(b^{k-n}N_n\right) l$ 是 l 的整数倍, 且

$$b^k\overline{x}_n = b^k\left(N_n+\frac{1}{b}\right)lb^{-n} = b^{k-n-1}(bN_n+1)\,l$$

也是 l 的整数倍, 从而由 (6.1.12) 得到

$$\varphi(b^n\overline{x}_n)-\varphi(b^n x_n) = a-a = 0. \tag{6.1.20}$$

联合 (6.1.17)~(6.1.20), 当 $n\in\mathbb{N}$ 时, 有

$$|f(\overline{x}_n)-f(x_n)| \geqslant \eta-\frac{Al}{b^{n+1}}\sum_{k=1}^{+\infty}b^k = \eta-\frac{Al}{b^{n+1}}\frac{b\left(b^{n-1}-1\right)}{b-1} > \eta-\frac{Al}{b(b-1)}. \tag{6.1.21}$$

再由 (6.1.16) 与 (6.1.21), 以及充分大的 $n\in\mathbb{N}$, 得到

$$\left|\frac{f(\overline{x}_n)-f(x_n)}{\overline{x}_n-x_n}\right| > \frac{\eta}{\frac{l}{b^{n+1}}}-\frac{A_l}{b(b-1)}\frac{1}{\frac{l}{b^{n+1}}} \geqslant \left(\frac{\eta}{l}-\frac{A}{b(b-1)}\right)b^{n+1}. \tag{6.1.22}$$

由假设条件 (6.1.14) 与 (6.1.22), 得到

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(\overline{x}_n)-f(x_n)}{\overline{x}_n-x_n}\right| = +\infty. \tag{6.1.23}$$

另一方面, (6.1.15) 与 (6.1.16) 给出 $x<x_n<\overline{x}_n$, 当 $n\to+\infty$ 时, $\overline{x}_n\to x_n$, 且

$$\overline{x}_n-x_n \geqslant \frac{\eta_n}{b} \geqslant \frac{\overline{x}_n-x_n}{b+1}.$$

最后, 据引理 6.1.1, 并且由 (6.1.23) 知, $f(x)$ 在 x 处不存在有限右导数. 对于左导数的论断可以类似得到.

现在考虑问题 (6.1.1) 的解 $u(t,x,y)=\lim\limits_{k\to+\infty}u_k(t,x,y)$ 的可导性.

假设 $(t,x,y)\in[0,+\infty)\times D_k$, 其中 t 与 y 暂时固定, 视 x 为变量. 对于两个级数

$$\lambda_k(t,x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_{k,m,n}\cos 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t\right\}\cdot\sin 4^k m\pi x\cdot\sin 4^k n\pi y,$$

$$\mu_k(t,x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{B_{k,m,n}\sin 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t\right\}\cdot\sin 4^k m\pi x\cdot\sin 4^k n\pi y,$$

其可导性相同. 假设两级数在关于 n, m 求和后能写成

$$\lambda_k(t,x,y)+\mu_k(t,x,y)=\Theta\left(4^k t,4^k x,4^k y\right), \tag{6.1.24}$$

于是

$$u(t,x,y)=\lim_{k\to+\infty}\Theta\left(4^k t,4^k x,4^k y\right). \tag{6.1.25}$$

定理 6.1.2 设级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\psi\left(4^k t,4^k x,4^k y\right)$ 绝对一致收敛. 对于 (t_0,x,y_0), $0\leqslant t_0<+\infty$, $(x,y_0)\in D_k$, $k\in\mathbb{N}$, 记

$$\varphi(x)=\psi\left(4^k t_0,x,4^k y_0\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

假设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足常数为 $A>0$ 的 Lipschitz 条件的有界函数, 若存在常数 $\eta>0$, 使得

(1) 对于一切整数 $k\in\mathbb{Z}$, 有

$$\left|\varphi\left(k+\frac{l}{4}\right)-\varphi(k)\right|\geqslant\eta; \tag{6.1.26}$$

(2) 下述不等式成立:

$$\eta-\frac{A}{12}>0. \tag{6.1.27}$$

则和函数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(4^k x)$ 为处处不存在有限右导数与左导数的连续函数.

证 由假设, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\psi\left(4^k t,4^k x,4^k y\right)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 中绝对一致收敛, 因此和函数连续.

另一方面, $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足常数为 $A>0$ 的 Lipschitz 条件的有界函数, 并以常数 $b=4$, $l=1$ 满足定理 6.1.1 的条件, 故和函数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(4^k x)$ 为处处不存在关于 x 的有限右导数与有限左导数的连续函数. 定理得证.

由于问题 (6.1.1) 的形式解是 (6.1.25), 故只要取定理 6.1.2 中的 ψ 为

$$\psi(4^k t,4^k x,4^k y)=\Theta(4^k t,4^k x,4^k y)-\Theta(4^{k-1}t,4^{k-1}x,4^{k-1}y),$$

满足定理 6.1.2 的条件, 定解问题 (6.1.1) 的形式解便会产生分形函数, 即处处连续但处处不可导. 现在运用计算机来描述二维薄膜在某个给定时刻的振动状态, 以产生逼真的振动形状与视觉效果, 目的是通过数值例子来探讨形式解的性质.

给出取初始位置 $\varphi_k(x,y)=0$, 初始速度 $\psi_k(x,y)\neq 0$ 的例子. 则

$$A_{k,m,n}=0,\quad B_{k,m,n}=\frac{4}{4^k\pi\sqrt{m^2+n^2}}\alpha_{k,m,n},$$

其中 $\alpha_{k,m,n}=\int_{D_k}\psi_k(x,y)\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例 6.1.1　初始速度

$$\psi_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}, & (x,y)\in\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5};\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

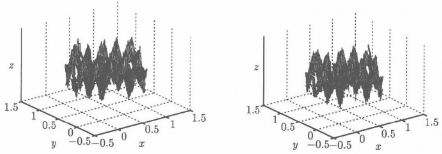
解　计算

$$\begin{aligned}\alpha_{k,m,n}&=\int_{D_k}\psi_k(x,y)\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{k^2}\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\sin 4^k m\pi x\mathrm{d}x\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{k^2}\left(-\frac{1}{4^k m\pi}\cos 4^k m\pi x\right)\Bigg|_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\left(-\frac{1}{4^k n\pi}\cos 4^k n\pi y\right)\Bigg|_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\\&=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{4^k m\pi}2\sin\frac{4^k m\pi}{2}\sin\frac{4^k m\pi}{10}\right)\left(\frac{1}{4^k n\pi}2\sin\frac{4^k n\pi}{2}\sin\frac{4^k n\pi}{10}\right)\\&=\frac{1}{k^2}\frac{4}{(4^k\pi)^2 mn}\left(\sin\frac{4^k m\pi}{2}\sin\frac{4^k m\pi}{10}\right)\left(\sin\frac{4^k n\pi}{2}\sin\frac{4^k n\pi}{10}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}u_k(t,x,y)=&\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{B_{k,m,n}\sin 4^k\sqrt{m^2+n^2}\pi t\right\}\cdot\sin 4^k m\pi x\cdot\sin 4^k n\pi y\\=&\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{16}{k^2(4^k\pi)^3\sqrt{m^2+n^2}mn}\sin\frac{4^k m\pi}{2}\sin\frac{4^k m\pi}{10}\sin\frac{4^k n\pi}{2}\sin\frac{4^k n\pi}{10}\right\}\\&\cdot\sin 4^k\pi\sqrt{m^2+n^2}t\sin 4^k m\pi x\cdot\sin 4^k n\pi y.\end{aligned}$$

对于解 $u_k(t,x,y)$, 系数为 $B_{k,m,n}=\dfrac{4\alpha_{k,m,n}}{4^k\pi\sqrt{m^2+n^2}}$. 不难验证, 定理 6.1.2 的条件满足, 故解 $u(t,x,y)$ 连续, 但处处不存在有限导数, 它是定解问题 (6.1.1) 的一个分形解. 如图 6.1.2 所示.



(a) $t=1$，$k=2$　　(b) $t=6$，$k=2$

图 6.1.2

例 6.1.2 初始速度

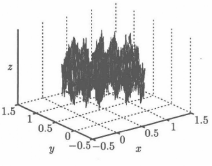
$$\psi_k(x,y)=\begin{cases} x^k y^k, & (x,y)\in\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5};\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解 计算

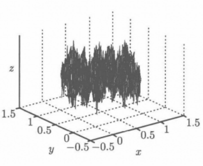
$$\begin{aligned}
\alpha_{k,m,n} &= \int_{D_k}\psi_k(x,y)\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} x^k\sin 4^k m\pi x\mathrm{d}x\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} y^k\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}y \\
&= \left\{\cos 4^k m\pi x\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^{j+1}\frac{k!}{(k-2j)!}\frac{x^{k-2j}}{(4^k m\pi)^{2j+1}}\right. \\
&\qquad \left. +\sin 4^k m\pi x\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^{j}\frac{k!}{(k-2j-1)!}\frac{x^{k-2j-1}}{(4^k m\pi)^{2j+2}}\right\}_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} \\
&\quad\cdot\left\{\cos 4^k n\pi y\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^{j+1}\frac{k!}{(k-2j)!}\frac{y^{k-2j}}{(4^k n\pi)^{2j+1}}\right. \\
&\qquad \left. +\sin 4^k n\pi y\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^{j}\frac{k!}{(k-2j-1)!}\frac{y^{k-2j-1}}{(4^k n\pi)^{2j+2}}\right\}_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}},
\end{aligned}$$

整理后可看出 $|\alpha_{k,m,n}|<+\infty$, 故解 $u_k(t,x,y)$ 的系数 $B_{k,m,n}=\dfrac{4\alpha_{k,m,n}}{4^k\pi\sqrt{m^2+n^2}}$ 与

例 6.1.1 有相同的性质, 从而解 $u(t,x,y)$ 连续, 但处处不存在有限导数, 它是边值问题 (6.1.1) 的一个分形解. 如图 6.1.3 所示.



(a) $t=1$, $k=2$



(b) $t=6$, $k=2$

图 6.1.3

例 6.1.3 初始速度

$$\psi_k(x,y)=\begin{cases}\sin 4^k x\sin 4^k y, & (x,y)\in\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5};\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 计算

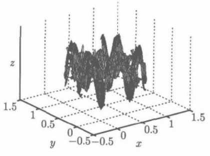
$$\begin{aligned}\alpha_{k,m,n}&=\int_{D_k}\psi_k(x,y)\sin 4^k m\pi x\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\sin 4^k x\sin 4^k m\pi x\mathrm{d}x\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\sin 4^k y\sin 4^k n\pi y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4^k(m^2\pi^2-1)}\left(\sin 4^k m\pi x\cos 4^k x-m\pi\cos 4^k m\pi x\sin 4^k x\right)\Big|_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\\&\quad\cdot\frac{1}{4^k(n^2\pi^2-1)}\left(\sin 4^k n\pi y\cos 4^k y-n\pi\cos 4^k n\pi y\sin 4^k y\right)\Big|_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}},\end{aligned}$$

这里 $B_{k,m,n}=\dfrac{4\alpha_{k,m,n}}{4^k\pi\sqrt{m^2+n^2}}$ 与前两个例稍有不同, 但仍能满足处处不存在有限导数的条件, 故问题 (6.1.1) 仍具有分形解. 如图 6.1.4 所示.

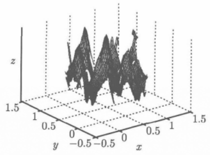
注 6.1.1 从物理意义上看, 例 6.1.1～例 6.1.3 是对于薄膜在小区间 $\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5};\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right]$ 上给一个小的敲击作为初始速度而发生的薄膜振动.

注 6.1.2 一般地, 如果对于问题 (6.1.1) 的初始条件要求满足 $A_{k,m,n}$, $B_{k,m,n}$ 具有 $a^k\Phi\left(\dfrac{1}{4^k m^s n^t}\right)$, $0<a<1, s>1, t>1$ 的阶, 就会满足定理 6.1.2 的条件, 从

而会产生分形解.



(a) $t=1$, $k=2$



(b) $t=6$, $k=2$

图 6.1.4

6.1.2 p 型二维波动方程的分形边界问题

1. 具有分形边界的 p 型二维波动方程

p 型二维波动偏微分方程有其物理意义[60], 代表定义在二维局部域上的 "薄膜" 的振动, 可以从具体问题出发而推导出运动方程

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial t^{\langle 2\rangle}}=\frac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}}+\frac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}},$$

这里 $\dfrac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial t^{\langle 2\rangle}}$, $\dfrac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}}$, $\dfrac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}}$ 分别是 $u(t,x,y)$ 的二阶 p 型偏导数, 而 $\dfrac{\partial^{\langle 1\rangle}u(t,x,y)}{\partial t^{\langle 1\rangle}}$ 则代表运动物体的位置 $u(t,x,y)$ 关于时间 $t\in\mathbb{R}^+$ 的变化率, 即 p 型 "速度", $(x,y)\in K_p\times K_p$.

具体地, 考虑问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial t^{\langle 2\rangle}}=\dfrac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}}+\dfrac{\partial^{\langle 2\rangle}u(t,x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}}, & t>0,(x,y)\in\Omega,\\ u(t,x,y)|_{t=0}=\varphi(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial^{\langle 1\rangle}u(t,x,y)}{\partial t^{\langle 1\rangle}}\right|_{t=0}=\psi(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ u(t,x,y)|_{\gamma}=0, & t>0,\end{cases}\tag{6.1.28}$$

其中边界 γ 是 p 进 von Koch 型曲线, 所围成的区域记为 $\Omega\subset K_p\times K_p$; 边界 γ 的近似曲线为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots$, 所围成的区域分别为 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$, 图 6.1.5 是 $p=5$ 时的 γ_1, γ_2, γ_4.

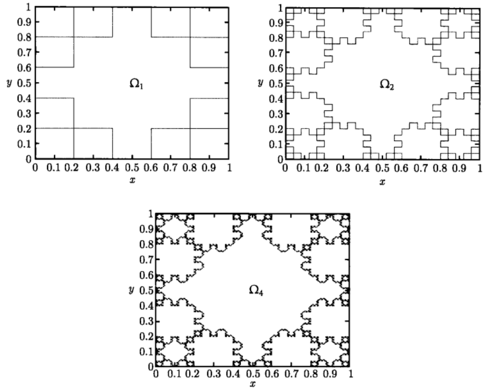


图 6.1.5

假设始值条件 $\varphi(x,y)=\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi_k(x,y)$ 与 $\psi(x,y)=\lim\limits_{k\to+\infty}\psi_k(x,y)$ 在 Ω 中收敛, 其中 $\varphi_k(x,y)$, $\psi_k(x,y)$ 的定义域为 $\Omega_k, k=1,2,\cdots$.

为解定解问题 (6.1.28), 本节中在 p 级数域上进行. 为此, 先回顾 p 级数域的基本知识.

将非负实数直线记为 $K_p=[0,+\infty)$, 对素数 $p\geqslant 2$, $\forall x\in K_p$ 可表示为

$$x=x_{-s}\beta^{-s}+\cdots+x_{-1}\beta^{-1}+x_0\beta^0+x_1\beta^1+\cdots,$$

其中 $x_j\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $j\geqslant -s, s\in\mathbb{P}$, $|\beta|=p^{-1}$, 运算加法 "+" 是按位 mod p, 不进位, $x,y\in K_p\Rightarrow x+y=(x_j+y_j \bmod p)$.

K_p 的特征群 $\Gamma_p=\{w_y:y\in K_p, w_y\in\mathbb{C}\}$ 是熟知的 Walsh 函数系, 每个特征 w_y 对 $x\in K_p$ 的作用是 $w_y(x)=\exp\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{p}y\otimes x$, 其中 $y\otimes x=\sum\limits_k x_ky_{-1-k}\,(\mathrm{mod}p)=x\otimes y=\sum\limits_k y_kx_{-1-k}(\mathrm{mod}p)$.

K_p 的紧子群 D 及其特征群

$$\Gamma_D = \{w_j(x): D \to \mathbb{C}, x \in D, j \in \mathbb{P}\}, \quad w_j(x) = \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{p} j \otimes x.$$

在二维情形, 紧群 $D \times D$ 的特征群 $\Gamma_D \times \Gamma_D$ 为

$$\Gamma_D \times \Gamma_D = \{w_{js}(x,y) = w_j(x) w_s(y): D \times D \to \mathbb{C}, (x,y) \in D \times D, j, s \in \mathbb{P}\}.$$

函数 $f(x,y): D \times D \to \mathbb{C}$ 可形式地展开成 Walsh-Fourier 级数,

$$f(x,y) = \sum_{j,s=0}^{+\infty} a_{j,s} w_j(x) w_s(y),$$

其中

$$w_j(x) = \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{p} j \otimes x, \quad w_s(y) = \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{p} s \otimes y,$$

系数为

$$a_{j,s} = \int_{D \times D} f(x,y) \overline{w}_j(x) \overline{w}_s(y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

用 p 进向量表示

$$\begin{aligned}
&x = (x_0, x_1, \cdots), \quad x_0, x_1, \cdots \in \{0, 1, \cdots, p-1\}, \\
&y = (y_0, y_1, \cdots), \quad y_0, y_1, \cdots \in \{0, 1, \cdots, p-1\}, \\
&j = (j_{-t}, j_{-t+1}, \cdots, j_0), \quad j_{-t}, j_{-t+1}, \cdots, j_0 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}, \quad t \in \mathbb{P}, \\
&s = (s_{-r}, s_{-r+1}, \cdots, s_0), \quad s_{-r}, s_{-r+1}, \cdots, s_0 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}, \quad r \in \mathbb{P},
\end{aligned}$$

则

$$w_j(x) = \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{p} j \otimes x = \cos \frac{2\pi}{p} \left(\sum_k x_k j_{-1-k} \right) + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{p} \left(\sum_k x_k j_{-1-k} \right),$$

$$w_s(y) = \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{p} s \otimes y = \cos \frac{2\pi}{p} \left(\sum_k y_k s_{-1-k} \right) + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{p} \left(\sum_k y_k s_{-1-k} \right).$$

p 型导数 $\dfrac{\partial^{\langle 2 \rangle} u}{\partial t^{\langle 2 \rangle}}, \dfrac{\partial^{\langle 2 \rangle} u}{\partial x^{\langle 2 \rangle}}, \dfrac{\partial^{\langle 2 \rangle} u}{\partial y^{\langle 2 \rangle}}, \dfrac{\partial^{\langle 1 \rangle} u}{\partial t^{\langle 1 \rangle}}$ 的定义及其等价定义在第 3 章中已经给出, 本节采用文献 [48] 中的形式: 对于 Haar 可测函数 $f: K_p \to \mathbb{C}$, 若极限

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{+N} p^k \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} A_j f\left(x + j p^{-k-1}\right) \right\}$$

存在且有限, 其中 $A_0 = \dfrac{p-1}{2}$, $A_k = \dfrac{\omega^k}{1-\omega^k}, k = 1, 2, \cdots, p-1$, 则称此极限为 $f(x)$

在 x 点的 p 型导数, 记为 $f^{\langle 1\rangle}(x)$. 关于 p 型导数的性质, 可参看文献 [7], [48], [60].

下面要用到的 p 型导数的基本性质有

$$\frac{\partial^{\langle 1\rangle} w_{js}(x,y)}{\partial x^{\langle 1\rangle}} = j w_j(x) w_s(y), \quad \frac{\partial^{\langle 1\rangle} w_{js}(x,y)}{\partial y^{\langle 1\rangle}} = s w_j(x) w_s(y),$$

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle} w_{js}(x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} = j^2 w_j(x) w_s(y), \quad \frac{\partial^{\langle 2\rangle} w_{js}(x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}} = s^2 w_j(x) w_s(y).$$

2. 具有分形边界的 p 型二维波动方程的解

解第 k 次定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial t^{\langle 2\rangle}} = \dfrac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} + \dfrac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}}, & t>0, (x,y)\in\Omega_k, \\ u_k(t,x,y)|_{t=0} = \varphi_k(x,y), & (x,y)\in\Omega_k, \\ \left.\dfrac{\partial^{\langle 1\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial t^{\langle 1\rangle}}\right|_{t=0} = \psi_k(x,y), & (x,y)\in\Omega_k, \\ u(t,x,y)|_{\gamma_k} = 0, & t>0, \end{cases} \tag{6.1.29}$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k, \cdots$ 是 p 进 von Koch 型曲线 γ 的第 1 次, 第 2 次, $\cdots$, 第 k 次, $\cdots$ 近似; 初始值 $\varphi(x,y) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k(x,y)$ 与 $\psi(x,y) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(x,y)$ 在 Ω 中收敛, 其中 $\varphi_k(x,y)$ 与 $\psi_k(x,y)$ 的定义域为 $\Omega_k, k=1,2,\cdots$.

设 $u_k(t,x,y) = T_k(t) v_k(x,y)$ 是问题 (6.1.29) 的形式解, 对于 $k=1,2,3,\cdots$,

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial t^{\langle 2\rangle}} = \frac{\mathrm{d}^{\langle 2\rangle} T_k(t)}{\mathrm{d}t^{\langle 2\rangle}} v_k(x,y),$$

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} = T_k(t) \frac{\partial^{\langle 2\rangle} v_k(x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}},$$

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}} = T_k(t) \frac{\partial^{\langle 2\rangle} v_k(x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}},$$

将其代入方程

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial t^{\langle 2\rangle}} = \frac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} + \frac{\partial^{\langle 2\rangle} u_k(t,x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}},$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\langle 2\rangle} T_k(t)}{\mathrm{d}t^{\langle 2\rangle}} v_k(x,y) = T_k(t) \left(\frac{\partial^{\langle 2\rangle} v_k(x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} + \frac{\partial^{\langle 2\rangle} v_k(x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}} \right),$$

当 $T_k(t) \neq 0, v_k(x,y) \neq 0$ 时, 得

$$\frac{1}{T_k(t)}\frac{\mathrm{d}^{\langle 2\rangle}T_k(t)}{\mathrm{d}t^{\langle 2\rangle}} = \frac{1}{v_k(x,y)}\left(\frac{\partial^{\langle 2\rangle}v_k(x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} + \frac{\partial^{\langle 2\rangle}v_k(x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}}\right).$$

由分离变量法的常规方法, 令上式右边为 $\lambda^2+\mu^2$, $\lambda>0$, $\mu>0$, 得

$$\frac{1}{T_k(t)}\frac{\mathrm{d}^{\langle 2\rangle}T_k(t)}{\mathrm{d}t^{\langle 2\rangle}} = \frac{1}{v_k(x,y)}\left(\frac{\partial^{\langle 2\rangle}v_k(x,y)}{\partial x^{\langle 2\rangle}} + \frac{\partial^{\langle 2\rangle}v_k(x,y)}{\partial y^{\langle 2\rangle}}\right) = \lambda^2+\mu^2, \quad \lambda>0, \mu>0.$$

于是

$$\frac{\partial^{\langle 2\rangle}v_k}{\partial x^{\langle 2\rangle}} + \frac{\partial^{\langle 2\rangle}v_k}{\partial y^{\langle 2\rangle}} = \left(\lambda^2+\mu^2\right)v_k, \tag{6.1.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\langle 2\rangle}T_k}{\mathrm{d}t^{\langle 2\rangle}} = \left(\lambda^2+\mu^2\right)T_k, \tag{6.1.31}$$

易验证

$$v_{k,\lambda,\mu}(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi}{p}(\lambda\otimes x)\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}(\mu\otimes y)\right)$$

是 (6.1.30) 的解. 为确定 λ 与 μ, 利用边界 γ_k 上的条件 $v_{k,\lambda,\mu}|_{\gamma_k}=0$, 得到

$$\lambda_{k,m,p} \equiv \lambda(k,m,p), \quad \mu_{k,n,p} = \mu(k,n,p), \quad m,n=1,2,\cdots.$$

于是, 解可写为

$$v_{k,m,n}(x,y) \equiv \sin\left(\frac{2\pi}{p}(\lambda_{k,m,p}\otimes x)\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}(\mu_{k,n,p}\otimes y)\right), \quad k,m,n=1,2,\cdots. \tag{6.1.32}$$

对应地, 方程 (6.1.31) 的解为

$$T_{k,m,n}(t) = A_{k,m,n}\cos\left(\frac{2\pi}{p}(\lambda_{k,m,p}\otimes t)\right) + B_{k,m,n}\sin\left(\frac{2\pi}{p}(\mu_{k,n,p}\otimes t)\right), \quad k,m,n=1,2,\cdots. \tag{6.1.33}$$

联合以上结果, 得

$$\begin{aligned} u_{k,m,n}(t,x,y) &= T_{k,m,n}(t)\,v_{k,m,n}(x,y) \\ &= \left\{A_{k,m,n}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_{k,m,p}\otimes t\right) + B_{k,m,n}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\mu_{k,n,p}\otimes t\right)\right\} \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_{k,m,p}\otimes x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\mu_{k,n,p}\otimes y\right), \quad k,m,n=1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{6.1.34}$$

$$A_{k,m,n}=\frac{\displaystyle\int_{\Omega_k}\varphi_k(x,y)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_{k,m,p}\otimes x\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{p}\mu_{k,n,p}\otimes y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{\Omega_k}\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_{k,m,p}\otimes x\right)\right\}^2\cdot\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{p}\mu_{k,n,p}\otimes y\right)\right\}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\tag{6.1.35}$$

$$B_{k,m,n}=\frac{\displaystyle\int_{\Omega_k}\psi_k(x,y)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_{k,m,p}\otimes x\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{p}\mu_{k,m,p}\otimes y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle p^k\sqrt{m^2+n^2}\int_{\Omega_k}\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_{k,m,p}\otimes x\right)\right\}^2\cdot\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{p}\mu_{k,m,p}\otimes y\right)\right\}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.\tag{6.1.36}$$

定解问题 (6.1.29) 的形式解为

$$u_k(t,x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}T_{k,m,n}(t)\,v_{k,m,n}(x,y),$$

于是, 问题 (6.1.28) 的形式解为

$$u(t,x,y)=\lim_{k\to+\infty}u_k(t,x,y)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{k,m,n}(t,x,y).\tag{6.1.37}$$

3. 数值例子

例 6.1.4　取 $p=3$, 3 进 von Koch 型曲线的第 1、第 2、第 4 次近似曲线的图如图 6.1.6 所示.

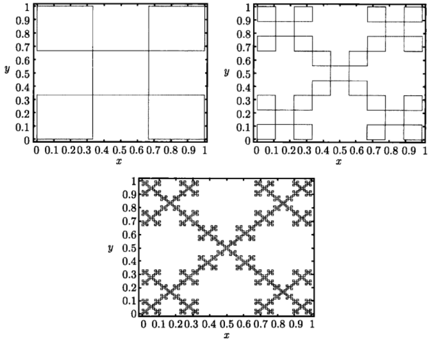


图 6.1.6

对于 $p=3$, 记 x,λ,y,μ 的 3 进制表示

$$
\begin{aligned}
x =& x_0\beta^0 + x_1\beta^1 + x_2\beta^2 + \cdots + x_s\beta^s + \cdots, \quad x_0,x_1,\cdots,x_s,\cdots \in \{0,1,2\}, \\
\lambda =& \lambda_{-s}\beta^{-s} + \lambda_{-s-1}\beta^{-s-1} + \cdots + \lambda_{-1}\beta^{-1} + \lambda_0\beta^0 + \lambda_1\beta^1 + \cdots, \\
& \qquad \lambda_{-s},\lambda_{-s-1},\cdots \in \{0,1,2\}, |\beta| = 3^{-1}, \quad s \in \mathbb{P}; \\
y =& y_0\beta^0 + y_1\beta^1 + y_2\beta^2 + \cdots + y_s\beta^s + \cdots, \quad y_0,y_1,\cdots,y_s,\cdots \in \{0,1,2\}, \\
\mu =& \mu_{-s}\beta^{-s} + \mu_{-s-1}\beta^{-s-1} + \cdots + \mu_{-1}\beta^{-1} + \mu_0\beta^0 + \mu_1\beta^1 + \cdots, \\
& \qquad \mu_{-s},\mu_{-s-1},\cdots \in \{0,1,2\}, |\beta| = 3^{-1}, \quad s \in \mathbb{P}.
\end{aligned}
$$

由 $\lambda \otimes x = \sum_k x_k\lambda_{-1-k}$ 与 $x \in \Omega$, 有 $x_{-1} = x_{-2} = \cdots = 0$, 所以 $\lambda \otimes x$ 的值与 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 的值无关, 故不妨取 $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0$, 使得

$$
\lambda \otimes x = \sum_k x_k\lambda_{-1-k} = \lambda_{-1}x_0 + \lambda_{-2}x_1 + \cdots + \lambda_{-s+1}x_{s-2} + \lambda_{-s}x_{s-1},
$$

$$
\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda \otimes x) = \sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}x_0 + \lambda_{-2}x_1 + \cdots + \lambda_{-s+1}x_{s-2} + \lambda_{-s}x_{s-1}).
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\mu \otimes y =& \sum_k y_k\mu_{-1-k} = \mu_{-1}y_0 + \mu_{-2}y_1 + \cdots \\
& + \mu_{-s+1}y_{s-2} + \mu_{-s}y_{s-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{3}(\mu \otimes y) =& \sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}y_0 + \mu_{-2}y_1 + \cdots \\
& + \mu_{-s+1}y_{s-2} + \mu_{-s}y_{s-1}).
\end{aligned}
$$

下面根据边界条件 $v_k|_{\gamma_k} = 0$ 来确定 λ,μ 的值. 对于 3 进 von Koch 型曲线 γ 的第 0 次与第 1 次近似, 如图 6.1.7 所示.

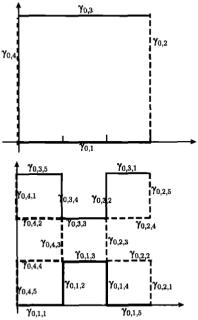


图 6.1.7

第 0 次近似. $\gamma_0 = \gamma_{0,1} \cup \gamma_{0,2} \cup \gamma_{0,3} \cup \gamma_{0,4}$, 正方形的 4 条边沿逆时针方向围成 Ω, 其中

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0,1} &= \{(x,y) : x \in [0,1), y = 0\}, \\
\gamma_{0,2} &= \{(x,y) : x = 1, y \in [0,1)\}, \\
\gamma_{0,3} &= \{(x,y) : x \in [0,1), y = 1\}, \\
\gamma_{0,4} &= \{(x,y) : x = 0, y \in [0,1)\}.
\end{aligned}
$$

粗实线 —— $\gamma_{0,1}=\{(x,y):x\in[0,1),y=0\}$.

$$\gamma_{0,1}:\quad x\in[0,1)\leftrightarrow x=x_0\left(\frac{1}{3}\right)^0+x_1\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots,\quad x_0=0,\quad x_1,x_2,\cdots\in\{0,1,2\},$$

$$y=0\leftrightarrow y=y_0\left(\frac{1}{3}\right)^0+y_1\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots,\quad y_0=y_1=\cdots=0,$$

$$① \sin\left(\frac{2\pi}{3}\lambda\otimes x\right)\Big|_{\gamma_{0,1}}=\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}x_0+\lambda_{-2}x_1+\cdots+\lambda_{-s}x_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,1}}$$
$$=\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-2}x_1+\lambda_{-3}x_2+\cdots+\lambda_{-s}x_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,1}};$$

$$② \sin\left(\frac{2\pi}{3}\mu\otimes y\right)\Big|_{\gamma_{0,1}}=\sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}y_0+\mu_{-2}y_1+\cdots+\mu_{-s}y_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,1}}$$
$$=\sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}\cdot 0+\mu_{-2}\cdot 0+\cdots+\mu_{-s}\cdot 0)\Big|_{\gamma_{0,1}}=0$$

自然成立. 于是, 对于任何 λ, μ, 有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda\otimes x)\sin\frac{2\pi}{3}(\mu\otimes y)\Big|_{\gamma_{0,1}}=0$.

细虚线 —— $\gamma_{0,2}=\{(x,y):x=1,y\in[0,1)\}$.

$$\gamma_{0,2}:\quad x=1\leftrightarrow x=1\left(\frac{1}{3}\right)^0,\quad x_0=1,x_1=x_2=\cdots=0,$$

$$y=[0,1)\leftrightarrow y=y_0\left(\frac{1}{3}\right)^0+y_1\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots,\quad y_0=0,\quad y_1,y_2,\cdots\in\{0,1,2\},$$

$$① \sin\left(\frac{2\pi}{3}\lambda\otimes x\right)\Big|_{\gamma_{0,2}}=\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}x_0+\lambda_{-2}x_1+\cdots+\lambda_{-s}x_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,2}}$$
$$=\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}x_0)\Big|_{\gamma_{0,2}}=\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}\cdot 1),$$

故当 $\lambda_{-1}=0$ 时, 有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}\cdot 1)=0$, 因此只要 $\lambda_{-1}=0$, 就有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda\otimes x)\Big|_{\gamma_{0,2}}$ $=0$;

$$② \sin\left(\frac{2\pi}{3}\mu\otimes y\right)\Big|_{\gamma_{0,2}}=\sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}y_0+y_{-2}y_1+\cdots+\mu_{-s}y_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,2}}$$
$$=\sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-2}y_1+\mu_{-3}y_2+\cdots+\mu_{-s}y_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,2}},$$

于是, 当 $\lambda = m\cdot 3^2, m\in\mathbb{N}$ 时, 有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda\otimes x)\sin\frac{2\pi}{3}(\mu\otimes y)\Big|_{\gamma_{0,2}} = 0.$

细实线 —— $\gamma_{0,3} = \{(x,y): x\in[0,1), y=1\}$.

$$\gamma_{0,3}:\quad x=[0,1)\leftrightarrow x = x_0\left(\frac{1}{3}\right)^0 + x_1\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots,\quad x_0=0,\quad x_1,x_2,\cdots\in\{0,1,2\},$$

$$y=1\leftrightarrow y=1\left(\frac{1}{3}\right)^0,\quad y_0=1,\quad y_1=y_2=\cdots=0,$$

$$① \sin\left(\frac{2\pi}{3}\lambda\otimes x\right)\Big|_{\gamma_{0,3}} = \sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}x_0+\lambda_{-2}x_1+\cdots+\lambda_{-s}x_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,3}}$$
$$= \sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-2}x_1+\lambda_{-3}x_2+\cdots+\lambda_{-s}x_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,3}};$$

$$② \sin\left(\frac{2\pi}{3}\mu\otimes y\right)\Big|_{\gamma_{0,3}} = \sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}\cdot y_0+y_{-2}y_1+\cdots+\mu_{-s}y_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,3}}$$
$$= \sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}y_0)\Big|_{\gamma_{0,3}} = \sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}\cdot 1).$$

故 $\mu_{-1}=0$ 时, 有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}\cdot 1)=0$, 因此只要 $\mu_{-1}=0$, 就有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\mu\otimes y)\Big|_{\gamma_{0,3}} = 0$. 于是, 当 $\mu = n\cdot 3^2, n\in\mathbb{N}$ 时, 有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda\otimes x)\sin\frac{2\pi}{3}(\mu\otimes y)\Big|_{\gamma_{0,3}} = 0$;

粗虚线 —— $\gamma_{0,4} = \{(x,y): x=0, y\in[0,1)\}$.

$$\gamma_{0,4}:\quad x=0\leftrightarrow x=0\left(\frac{1}{3}\right)^0+0\left(\frac{1}{3}\right)^1,\quad x_0=x_1=x_2=\cdots=0,$$

$$y=[0,1)\leftrightarrow y=y_0\left(\frac{1}{3}\right)^0+y_1\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots,\quad y_0=0,\quad y_1,y_2,\cdots\in\{0,1,2\},$$

$$① \sin\left(\frac{2\pi}{3}\lambda\otimes x\right)\Big|_{\gamma_{0,4}} = \sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}x_0+\lambda_{-2}x_1+\cdots+\lambda_{-s}x_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,4}}$$
$$= \sin\frac{2\pi}{3}(\lambda_{-1}0+\lambda_{-2}0)\Big|_{\gamma_{0,4}} = 0 \text{ 自然成立;}$$

$$② \sin\left(\frac{2\pi}{3}\mu\otimes y\right)\Big|_{\gamma_{0,4}} = \sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-1}y_0+y_{-2}y_1+\cdots+\mu_{-s}y_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,4}}$$
$$= \sin\frac{2\pi}{3}(\mu_{-2}y_1+\mu_{-3}y_2+\cdots+\mu_{-s}y_{s-1})\Big|_{\gamma_{0,4}}.$$

于是, 对任意 λ, μ, 有 $\sin\frac{2\pi}{3}(\lambda\otimes x)\sin\frac{2\pi}{3}(\mu\otimes y)\Big|_{\gamma_{0,4}}=0$.

综合以上, 在第 0 次近似时, 取 $\lambda=m\cdot 3^2$, $\mu=n\cdot 3^2$, $m,n\in\mathbb{N}$, 边界条件满足.

归纳地, 第 $k\in\mathbb{N}$ 次近似 γ_k,

$$\gamma_k=\bigcup_{j_1=1}^{4}\bigcup_{j_2=1}^{5}\cdots\bigcup_{j_{k+1}=1}^{5}\gamma_{0,j_1,j_2,\cdots,j_{k+1}},\quad k\in\mathbb{N},$$

固有值序列为 $\lambda=3^{k+2}m$, $\mu=3^{k+2}n$, $m,n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{P}$, 则边界条件满足.

于是, (6.1.30) 问题的固有值序列为

$$\lambda_{k,m,3}=3^{k+2}m,\quad \mu_{k,n,3}=3^{k+2}n,\quad m,n=1,2,\cdots,$$

解可写为

$$v_{k,m,n}(x,y)=\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes x\right)\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes y\right),$$
$$k=0,1,2,\cdots,\quad m,n=1,2,\cdots.$$

对应地, 方程 (6.1.31) 的解为

$$T_{k,m,n}(t)=A_{k,m,n}\cos\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes t\right)+B_{k,m,n}\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes t\right),$$
$$k=0,1,2,\cdots,\quad m,n=1,2,\cdots.$$

联合以上结果, 得

$$\begin{aligned}u_{k,m,n}(t,x,y)=&T_{k,m,n}(t)\,v_{k,m,n}(x,y)\\=&\left\{A_{k,m,n}\cos\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes t\right)+B_{k,m,n}\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes t\right)\right\}\\&\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes x\right)\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes y\right),\quad k\in\mathbb{P},\quad m,n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

其中

$$A_{k,m,n}=\frac{\displaystyle\int_{\Omega_k}\varphi_k(x,y)\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes x\right)\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{\Omega_k}\left\{\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes x\right)\right\}^2\cdot\left\{\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes y\right)\right\}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$B_{k,m,n}=\frac{\displaystyle\int_{\Omega_k}\psi_k(x,y)\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes x\right)\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}n\otimes y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle 3^{k+2}\sqrt{m^2+n^2}\int_{\Omega_k}\left\{\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}m\otimes x\right)\right\}^2\cdot\left\{\sin\frac{2\pi}{3}\left(3^{k+2}\otimes y\right)\right\}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

定解问题 (6.1.29) 的形式解为

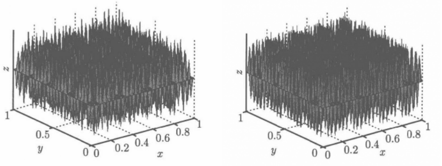
$$u_k(t,x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}T_{k,m,n}(t)\,v_{k,m,n}(x,y),$$

于是, 问题 (6.1.28) 的形式解为

$$u(t,x,y)=\lim_{k\to+\infty}u_k(t,x,y)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{k,m,n}(t,x,y).$$

$p=5,\psi_k(x,y)=0,\psi_k(x,y)$ 与例 6.1.1 中的 $\psi_k(x,y)$ 相同的数值解的近似图如图 6.1.8 所示.

其他数值例子, 如 $p=5$, $p=7$ 的 von Koch 型曲线为边界二维波动问题 (6.2.28) 等, 都可给出具体的解与各阶的近似图形.



$t=1$, $k=2$　　　　$t=5$, $k=2$

图 6.1.8

6.2 局部域 K_p 上分形 PDE 的一般理论

例 6.1.4 显示了局部域上的一个特殊的 p 型二阶偏微分方程的定解问题的解的状况, 它启示我们建立局部域 K_p 上分形偏微分方程的一般理论.

6.2.1 拟微分算子 T_α

局部域 K_p 上的拟微分算子在局部域微分方程理论中占据极其重要的地位. 本节作为局部域上微分方程理论的基础, 以 p 级数域为研究对象. 有两个原因: 一是 p 级数域的运算是按位的模 p 加法, 不进位, 因此比较简单, 作为局部域上的微分方程理论研究的入门, 是比较适宜的; 二是关于一般局部域, 包括 p 级数域、p 进数域、两种域的有限代数扩张, 其上的微分方程理论很不成熟, 是当今的前沿课题, 开问题非常多, 有待于进一步的深入研究[46],[56].

1. 局部域 K_p 上的 Fourier 分析

假定读者已经熟悉局部域 K_p 上的 Fourier 分析的一般结果, 如检验函数空间 $\mathbb{S}(K_p)$、分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$、象征类 $S^{\alpha}_{\rho\delta}(K_p) \equiv S^{\alpha}_{\rho\delta}(K_p \times \Gamma_p)$、$\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$ 与 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 的 Fourier 变换与逆 Fourier 变换、两个元的卷积及卷积的 Fourier 变换公式等. 参看 3.1 节.

2. 局部域 K_p 上的拟微分算子

局部域 K_p 上的拟微分算子 T_α 的定义如下.

设 $\xi \in \Gamma_p$, 记 $\langle\xi\rangle = \max\{1, |\xi|\}$, 则 $\langle\xi\rangle^\alpha \in S^{\alpha}_{\rho\sigma}(K_p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$. 以 $\langle\xi\rangle^\alpha$ 为象征的拟微分算子记为 T_α(参看 (3.2.2) 式):

$$T_\alpha\varphi = \left(\langle\xi\rangle^\alpha \varphi^\wedge\right)^\vee, \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p), \tag{6.2.1}$$

并且定义

$$\langle T_\alpha f, \varphi\rangle = \langle f, T_\alpha\varphi\rangle, \quad \forall f \in \mathbb{S}^*(K_p). \tag{6.2.2}$$

对于 $\alpha > 0$, 算子 T_α 称为 α 阶 p 型导算子; 对于 $\alpha < 0$, 算子 T_α 称为 $-\alpha$ 阶 p 型积分算子; 对于 $\alpha = 0$, 算子 $T_0 : T_0 f = f = If$ 为恒同算子.

为研究局部域 K_p 上的拟微分算子 T_α 的卷积核, 首先定义一个分布 $\pi_\alpha \in \mathbb{S}^*(K_p)$.

定义 6.2.1 (分布 π_α) 设 $\alpha \in \mathbb{C}$, 对于 $\mathrm{Re}\alpha > 0$, 定义一个分布 $\pi_\alpha \in \mathbb{S}^*(K_p)$,

$$\langle\pi_\alpha, \varphi\rangle = \int_{K_p} |x|^{\alpha-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p). \tag{6.2.3}$$

上述积分是绝对收敛的, 从而保证了定义 (6.2.3) 的合理性. 进而, 注意到分布 π_α 在 $\mathrm{Re}\alpha > 0$ 上是全纯的, 故可将 π_α 解析延拓到复平面 $\mathbb{C}$ 上, 使 $\forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 有

$$\langle\pi_\alpha, \varphi\rangle = \int_{B^0} |x|^{\alpha-1}(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x + \int_{K_p\setminus B^0} |x|^{\alpha-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\varphi(0). \tag{6.2.4}$$

显见, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上, 除了 $\alpha_k = \dfrac{2k\pi\mathrm{i}}{\ln p}$, $k \in \mathbb{Z}$, 外, π_α 是解析的, 从而对于任意非零实数 $\alpha \neq 0$, 分布 π_α 的定义是合理的.

(6.2.3), (6.2.4) 可简化为[88]: 对于 $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$,

$$\langle\pi_\alpha, \varphi\rangle = \int_{K_p} |x|^{\alpha-1}(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in \mathbb{S}(K_p). \tag{6.2.5}$$

为求算子 T_α 的卷积核, 现在证明两个引理.

引理 6.2.1 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 对于 $\alpha\neq 0$, 有

$$\int_{B^0}|x|^{-\alpha-1}\left(\chi(-\xi x)-1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{p^{-\alpha}-p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}+\frac{1-p^{-\alpha-1}}{1-p^{\alpha}}|\xi|^{\alpha}\right)(1-\Delta_0),$$

其中

$$\Delta_0(x)=\begin{cases}1, & x\in B^0,\\ 0, & x\notin B^0,\end{cases}\qquad B^0=\{x\in K_p:|x|\leqslant 1\}.$$

证 作变量代换 $t=\xi x$, $\mathrm{d}t=|\xi|\,\mathrm{d}x$, 得到

$$\begin{aligned}\int_{B^0}|x|^{-\alpha-1}\left(x(-\xi x)-1\right)\mathrm{d}x&=|\xi|^{-1}\int_{|t|\leqslant|\xi|}\left|\xi^{-1}t\right|^{-\alpha-1}\left(\chi(-t)-1\right)\mathrm{d}t\\&=|\xi|^{\alpha}\int_{|t|\leqslant|\xi|}|t|^{-\alpha-1}\left(\chi(-t)-1\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

若 $|\xi|\leqslant 1$, 则 $\chi(-t)=1$, 且 $\displaystyle\int_{|t|\leqslant|\xi|}|t|^{-\alpha-1}\left(\chi(-t)-1\right)\mathrm{d}t=0$; 若 $|\xi|=p^N>1$, 即 $N>0$, 则

$$\begin{aligned}\int_{|t|\leqslant|\xi|}|t|^{-\alpha-1}\left(\chi(-t)-1\right)\mathrm{d}t&=\int_{p\leqslant|t|\leqslant|\xi|}|t|^{-\alpha-1}\left(\chi(-t)-1\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{r=1}^{N}p^{-\alpha r-r}\left(\int_{|t|=p^r}\chi(-t)\,\mathrm{d}t-p^r\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\\&=-p^{-\alpha-1}-\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{-\alpha}\frac{1-p^{-\alpha N}}{1-p^{-\alpha}}\\&=\frac{p^{-\alpha}-p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}|\xi|^{-\alpha}+\frac{1-p^{-\alpha-1}}{1-p^{\alpha}},\end{aligned}$$

因此

$$\int_{B^0}|x|^{-\alpha-1}\left(\chi(-\xi x)-1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{p^{-\alpha}-p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}+\frac{1-p^{-\alpha-1}}{1-p^{\alpha}}|\xi|^{\alpha}\right)(1-\Delta_0).$$

定义 6.2.2 (局部常值函数) 称函数 $\psi:K_p\to\mathbb{C}$ 为局部常值的, 若 $\forall x\in K_p$, 存在整数 $l(x)\in\mathbb{Z}$, 使得 $\psi(x+y)=\psi(x)$, $y\in B^{l(x)}$; 局部常值函数的全体记为 $\mathbb{H}(K_p)$.

引理 6.2.2 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 令

$$\kappa_\alpha=\begin{cases}\left(\dfrac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}\pi_{-\alpha}+\dfrac{1-p^{\alpha}}{1-p^{\alpha+1}}\right)\Delta_0, & \alpha\neq 0,-1,\\[2ex] \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\log_p|x|\right)\Delta_0, & \alpha=-1,\\[2ex] \delta, & \alpha=0,\end{cases}$$

则

$$(\kappa_\alpha)^\wedge = \langle\xi\rangle^\alpha.$$

证 由定义知, 分布 κ_α 具有紧支集, $\operatorname{supp}\kappa_\alpha \subset B^0$, 因此, 不难证明, $(\kappa_\alpha)^\wedge$ 是局部常值函数.

(a) 当 $\alpha \neq 0, -1$ 时, 利用 (6.2.4) 式, Fubini 定理与引理 6.2.1, 有

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \pi_{-\alpha} \Delta_0 \right)^\wedge, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \pi_{-\alpha} \Delta_0, \varphi^\wedge \right\rangle \\
=& \int_{B^0} \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} |x|^{-\alpha-1} \left(\varphi^\wedge(x) - \varphi^\wedge(0) \right) \mathrm{d}x + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \varphi^\wedge(0) \\
=& \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \int_{B^0} |x|^{-\alpha-1} \int_{\Gamma_p} \varphi(\xi) \left(\chi(-\xi x) - 1 \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \langle 1, \varphi \rangle \\
=& \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \int_{\Gamma_p} \varphi(\xi) \int_{B^0} |x|^{-\alpha-1} \left(\chi(-\xi x) - 1 \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \langle 1, \varphi \rangle \\
=& \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \left\langle \left(\frac{p^{-\alpha} - p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}} + \frac{1-p^{-\alpha-1}}{1-p^\alpha} |\xi|^\alpha \right) (1-\Delta_0), \varphi \right\rangle + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \langle 1, \varphi \rangle \\
=& \left\langle \left(|\xi|^\alpha - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \right) (1-\Delta_0), \varphi \right\rangle + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \langle 1, \varphi \rangle \\
=& \left\langle |\xi|^\alpha (1-\Delta_0) + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \Delta_0, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
(\kappa_\alpha)^\wedge &= |\xi|^\alpha (1-\Delta_0) + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \Delta_0 + \frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}} \Delta_0 \\
&= |\xi|^\alpha (1-\Delta_0) + \Delta_0 = \langle\xi\rangle^\alpha.
\end{aligned}$$

(b) 当 $\alpha = -1$ 时,

$$\begin{aligned}
(\kappa_{-1})^\wedge &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{B^0} \left(1 - \log_p |x|\right) \chi(-\xi x) \mathrm{d}x \\
&= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\Delta_0 - \int_{B^0} \log_p |x| \chi(-\xi x) \mathrm{d}x \right).
\end{aligned}$$

计算积分 $\int_{B^0} \log_p |x| \chi(-\xi x) \mathrm{d}x$. 若 $|\xi| \leqslant 1$, 则

$$\int_{B^0} \log_p |x| \chi(-\xi x) \mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{+\infty} \int_{|x|=p^{-r}} \log_p |x| \mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{+\infty} (-r) p^{-r} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{1-p},$$

因此

$$(\kappa_{-1})^\wedge(\xi) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{1-p}\right) = 1, \quad |\xi| \leqslant 1.$$

若 $|\xi| = p^N > 1$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leqslant|\xi|^{-1}} \log_p |x| \chi(-\xi x)\,\mathrm{d}x + \int_{|\xi|^{-1}<|x|\leqslant 1} \log_p |x| \chi(-\xi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{r=N}^{+\infty} (-r) p^{-r} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \sum_{r=0}^{N-1} (-r) \int_{|x|=p^{-r}} \chi(-\xi x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{r=N}^{+\infty} r p^{-r} + (-N+1)\left(-p^{-N}\right) = \frac{p^{-N}}{p^{-1}-1} = \frac{|\xi|^{-1}}{p^{-1}-1},
\end{aligned}$$

因此

$$(\kappa_{-1})^{\wedge}(\xi) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(-\frac{|\xi|^{-1}}{p^{-1}-1}\right) = |\xi|^{-1}, \quad |\xi| > 1.$$

综上得到

$$(\kappa_{-1})^{\wedge}(\xi) = \langle\xi\rangle^{-1}.$$

(c) 当 $\alpha = 0$ 时, 得到

$$(\kappa_\alpha)^{\wedge} = \delta^{\wedge} = 1 = \langle\xi\rangle^{0}.$$

引理得证.

定理 6.2.1 κ_α 具有半群性质:

$$\kappa_\alpha * \kappa_\beta = \kappa_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

证 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{supp}\kappa_\alpha \subset B^0$, $\mathrm{supp}\kappa_\beta \subset B^0$, 从而 $\kappa_\alpha * \kappa_\beta$ 存在, 因此

$$(\kappa_{\alpha+\beta})^{\wedge} = \langle\xi\rangle^{\alpha+\beta} = \langle\xi\rangle^{\alpha} \cdot \langle\xi\rangle^{\beta} = (\kappa_\alpha)^{\wedge} \cdot (\kappa_\beta)^{\wedge} = (\kappa_\alpha * \kappa_\beta)^{\wedge},$$

故得到 $\kappa_\alpha * \kappa_\beta = \kappa_{\alpha+\beta}$.

算子 T_α 具有如下性质:

定理 6.2.2 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则

(1) $\forall f \in \mathbb{S}^*(K_p) \Rightarrow T_\alpha f = \kappa_\alpha * f$, 即算子 T_α 有卷积核 κ_α;

(2) $\forall f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow T_{\alpha+\beta} f = T_\alpha T_\beta f = T_{\beta+\alpha} f$.

从而 $T_\alpha T_{-\alpha} f = T_0 f = f$, 即 $(T_\alpha)^{-1} = T_{-\alpha}$.

证 (1) 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 与 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 由 $\mathrm{supp}\kappa_\alpha \subset B^0$, 从而 $\kappa_\alpha * f$ 存在. 利用引理 6.2.2, 得

$$T_\alpha f = \left(\langle\xi\rangle^{\alpha} f^{\wedge}\right)^{\vee} = \left((\kappa_\alpha)^{\wedge} \cdot f^{\wedge}\right)^{\vee} = \left((\kappa_\alpha * f)^{\wedge}\right)^{\vee} = \kappa_\alpha * f.$$

(2) $T_\alpha T_\beta f = T_\alpha (T_\beta f) = \kappa_\alpha * (\kappa_\beta * f) = (\kappa_\alpha * \kappa_\beta) * f = \kappa_{\alpha+\beta} * f = T_{\alpha+\beta} f$.

下面寻找拟微分算子 T_α 在分布空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中的不动点集, 为分形微分方程理论作准备.

由于 $T_0 = I$ 为恒同算子, $\forall f \in \mathbb{S}^*(K_p) \Rightarrow T_0 f = f$, 故本小节中设 $\alpha \neq 0$.

定理 6.2.3 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 空间 $\mathbb{S}(K_p)$, $\mathbb{S}^*(K_p)$, $\mathbb{H}(K_p)$ 是算子 T_α 的不变空间.

证明留作练习.

然而, 算子 T_α 的不动点集却与 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$ 的支集有关.

定义 6.2.3 (空间 $\mathbb{E}(K_p)$) 对于 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, 定义

$$\mathbb{E}(K_p) = \left\{ f \in \mathbb{S}^*(K_p) : \mathrm{supp} f^\wedge \subset \Gamma^0 \right\},$$

它是 Fourier 变换具有紧支集且支集 $\mathrm{supp} f^\wedge$ 含在 Γ^0 中的分布的全体.

定理 6.2.4 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, 则 $T_\alpha g = g$ 当且仅当 $g \in \mathbb{E}(K_p)$.

证 充分性. 取 $g \in \mathbb{E}(K_p)$, 由 $\mathrm{supp} g^\wedge \subset \Gamma^0$, 有

$$(\kappa_\alpha * g)^\wedge = (\kappa_\alpha)^\wedge \cdot g^\wedge = \langle\xi\rangle^\alpha g^\wedge = g^\wedge,$$

这最后一步是因为 $\xi \in B^0 \Rightarrow \langle\xi\rangle = 1$. 于是据定理 6.2.1(1) 与 Fourier 变换的唯一性, 得 $T_\alpha g = k_\alpha * g = g$, 充分性得证.

必要性. 设 $T_\alpha g = g$, $g \in \mathbb{S}^*(K_p)$. 若 $\mathrm{supp} g^\wedge \not\subset \Gamma^0$, 则必存在检验函数 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, $\mathrm{supp}\varphi \subset K_p \backslash B^0$, 使得

$$\langle g^\wedge, \varphi \rangle \neq 0. \tag{6.2.6}$$

由 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 必存在整数 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\mathrm{supp}\varphi \subset B^{-N}$, 且

$$\varphi = \sum_{r=1}^{N} \varphi \cdot \Phi_{B^{-r} \backslash B^{-r+1}} = \sum_{r=1}^{N} \varphi_r,$$

其中 $\varphi_r = \varphi \cdot \Phi_{B^{-r} \backslash B^{-r+1}} \in \mathbb{S}(K_p)$. 于是, (6.2.6) 给出: 存在 $r_0, 1 \leqslant r_0 \leqslant N$, 使得

$$\langle g^\wedge, \varphi_{r_0} \rangle \neq 0.$$

另一方面, 由 $T_\alpha g = k_\alpha * g = g$ 得 $g^\wedge = \langle\xi\rangle^\alpha g^\wedge$, 故

$$\langle g^\wedge, \varphi_{r_0} \rangle = \langle \langle\xi\rangle^\alpha g^\wedge, \varphi_{r_0} \rangle = \langle g^\wedge, \langle\xi\rangle^\alpha \varphi_{r_0} \rangle = \langle g^\wedge, p^{\alpha r_0} \varphi_{r_0} \rangle = p^{\alpha r_0} \langle g^\wedge, \varphi_{r_0} \rangle,$$

因此有 $p^{\alpha r_0} = 1$. 但这与 $\alpha \neq 0$, $r_0 \neq 0$ 矛盾, 故 $\mathrm{supp} g^\wedge \subset \Gamma^0$, 必要性得证.

定理 6.2.5 T_α 的不动点集 $\mathbb{E}(K_p)$ 是 $\mathbb{H}(K_p)$ 的子集, 且

$$\mathbb{E}(K_p) = \left\{ f \in \mathbb{H}(K_p) : f \text{ 在 } B^0 \text{ 的陪集上取常值} \right\}.$$

拟微分算子 T_α 关于实参数 $\alpha\in\mathbb{R}$ 是连续的.

定理 6.2.6 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 则 κ_α 关于 α 在空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 内连续, 特别地,

$$\lim_{\alpha\to 0}\kappa_\alpha=\delta,\qquad 在\ \mathbb{S}^*(K_p)\ 中,$$
$$\lim_{\alpha\to -1}\kappa_\alpha=\kappa_{-1},\quad 在\ \mathbb{S}^*(K_p)\ 中.$$

证 显然, 对于 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\langle\xi\rangle^\alpha$ 关于参数 α 在 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 内连续. 进而, 由逆 Fourier 变换算子在空间 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 中的连续性知, $(\langle\xi\rangle^\alpha)^\vee$ 关于参数 α 在 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 内连续, 因此核 κ_α 关于参数 α 在 $\mathbb{S}^*(K_p)$ 内连续.

定理 6.2.7 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 对于 $f\in\mathbb{S}^*(K_p)$, 有

$$\lim_{\beta\to\alpha}T^\beta f=T^\alpha f.$$

证 首先证明, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 有 $\lim\limits_{\beta\to\alpha}T^\beta\varphi=T^\alpha\varphi$. 事实上, 设整数 $l\leqslant N$, 记函数集合

$$D_l^N=\left\{\varphi\in\mathbb{S}(K_p):\operatorname{supp}\varphi\subset B^l, g\ 在\ B^N\ 的陪集上取常值\right\},$$

由定理 3.1.5, $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 都存在指标对 (N,l), 使得 $\varphi\in D_l^N$, $\varphi^\wedge\in D_{-N}^{-l}$.

注意到, $\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha\in\mathbb{H}(K_p)$, 且 $\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha$ 在 B^0 的陪集上取常值, 故

$$\left(\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha\right)\varphi^\wedge(\xi)\in D_{-\max\{0,N\}}^{-l},$$

因此

$$T^\beta\varphi-T^\alpha\varphi=\left(\left(\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha\right)\varphi^\wedge(\xi)\right)^\vee\in D_l^{\max\{0,N\}}.$$

另一方面, 由于 $\varphi^\wedge\in D_{-N}^{-l}$, 故

$$\begin{aligned}T^\beta\varphi-T^\alpha\varphi&=\int_{\Gamma_p}\left(\left(\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha\right)\varphi^\wedge(\xi)\right)\chi_\xi(x)\,\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\Gamma^l\setminus\Gamma^0}\left(\left(\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha\right)\varphi^\wedge(\xi)\right)\chi_\xi(x)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

有

$$\left|T^\beta\varphi-T^\alpha\varphi\right|\leqslant M\int_{\Gamma^l\setminus\Gamma^0}\left|\langle\xi\rangle^\beta-\langle\xi\rangle^\alpha\right|\mathrm{d}\xi,$$

其中 M 是依赖于 φ 的常数. 再由 Lebesgue 控制收敛定理, 当 $\beta\to\alpha$ 时, 一致成立 $T^\beta\varphi-T^\alpha\varphi\to 0$. 于是, 有

$$T^\beta\varphi\xrightarrow{\mathbb{S}}T^\alpha\varphi,\quad\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p).$$

其次, 对于 $f \in \mathbb{S}^*(K_p)$, $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 有

$$\langle T^\beta f - T^\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, T^\beta \varphi - T^\alpha \varphi \rangle .$$

当 $\beta \to \alpha$ 时, 有 $T^\beta \varphi \xrightarrow{\mathbb{S}} T^\alpha \varphi$, 再由分布 f 的连续性, 得 $\langle f, T^\beta \varphi - T^\alpha \varphi \rangle \to 0$, 故

$$T^\beta f \xrightarrow{\mathbb{S}^*} T^\alpha f, \quad \forall f \in \mathbb{S}^*(K_p).$$

定理得证.

下面给出求 p 进导数的一些例子.

例 6.2.1　设 $\alpha > 0$, 求 $T_\alpha \varphi$, $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$.

解　对于 $\alpha > 0$, 由

$$T_\alpha \varphi(x) = \kappa_\alpha * \varphi(x) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \pi_{-\alpha} \Delta_0 * \varphi(x) + \frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}} \Delta_0 * \varphi(x),$$

计算 (按定理 3.1.25)

$$\begin{aligned}\pi_{-\alpha}\Delta_0 * \varphi(x) &= \langle \pi_{-\alpha}\Delta_0, \varphi(x-\cdot)\rangle = \langle \pi_{-\alpha}, \Delta_0\varphi(x-\cdot)\rangle \\ &= \int_{B^0} |y|^{-\alpha-1}(\varphi(x-y)-\varphi(x))\,\mathrm{d}y - \varphi(x)\int_{K_p\setminus B^0} |y|^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{x+B^0} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|^{\alpha+1}}\mathrm{d}y - \varphi(x)\left(1-p^{-1}\right)\frac{p^{-\alpha}}{1-p^{-\alpha}},\end{aligned}$$

因此

$$T_\alpha \varphi(x) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \int_{x+B^0} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|^{\alpha+1}}\mathrm{d}y + \frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}} \int_{x+B^0} \varphi(y)\,\mathrm{d}y + \frac{p-1}{p-p^{-\alpha}}\varphi(x).$$

例 6.2.2　设 $\alpha < 0$, $\alpha \neq -1$, 求 $T_\alpha \varphi$, $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$.

解　对于 $\alpha < 0$, $\alpha \neq -1$, 有

$$T_\alpha \varphi(x) = \kappa_\alpha * \varphi(x) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \pi_{-\alpha} * \varphi(x) + \frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}} \Delta_0 * \varphi(x).$$

仍按定理 3.1.25, 有

$$\begin{aligned}\pi_{-\alpha}\Delta_0 * \varphi(x) &= \langle \pi_{-\alpha}\Delta_0, \varphi(x-\cdot)\rangle = \langle \pi_{-\alpha}, \Delta_0\varphi(x-\cdot)\rangle \\ &= \int_{B^0} |y|^{-\alpha-1}\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{x+B^0} |y-x|^{-\alpha-1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此

$$T_\alpha \varphi(x) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \int_{x+B^0} |y-x|^{-\alpha-1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}} \int_{x+B^0} \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 6.2.3 设 $\alpha=-1$, 求 $T_{-1}\varphi$, $\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$.

解 对于 $\alpha=-1$, 有

$$\begin{aligned}T_{-1}\varphi(x)&=\kappa_{-1}*\varphi(x)=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\log_p|x|\right)\Delta_0*\varphi(x)\\&=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\langle 1-\log_p|y|,\Delta_0\varphi(x-y)\right\rangle\\&=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{B^0}\left(1-\log_p|y|\right)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y\\&=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{x+B^0}\left(1-\log_p|y-x|\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

于是

$$T_{-1}\varphi(x)=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{x+B^0}\left(1-\log_p|y-x|\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 6.2.4 求 $T_\alpha\chi_\eta(x)$, $\chi_\eta\in\Gamma_p$, $\eta\in K_p$.

解 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\eta\in K_p$, 由 $(\chi_\eta(\cdot))^\wedge=\delta_\eta$ (见例 3.3.1), 故 $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 有

$$\begin{aligned}\langle T_\alpha\chi_\eta(\cdot),\varphi\rangle&=\left\langle\left(\langle\xi\rangle^\alpha\delta_\eta\right)^\vee,\varphi\right\rangle=\left\langle\delta_\eta,\langle\xi\rangle^\alpha\varphi^\vee(\xi)\right\rangle\\&=\langle\eta\rangle^\alpha\varphi^\vee(\eta)=\langle\eta\rangle^\alpha\langle\chi_\eta(\cdot),\varphi\rangle=\left\langle\langle\eta\rangle^\alpha\chi_\eta(\cdot),\varphi\right\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$T_\alpha\chi_\eta(x)=\langle\eta\rangle^\alpha\chi_\eta(x).$$

例 6.2.5 求 $T_\alpha 1$.

解 由 $1^\wedge=\delta$, 故 $\forall\varphi\in\mathbb{S}(K_p)$, 有

$$\langle T_\alpha 1,\varphi\rangle=\left\langle\left(\langle\xi\rangle^\alpha\delta\right)^\vee,\varphi\right\rangle=\left\langle\langle\xi\rangle^\alpha\delta,\varphi^\vee(\xi)\right\rangle=\left\langle\delta,\langle\xi\rangle^\alpha\varphi^\vee(\xi)\right\rangle=\langle0\rangle^\alpha\varphi^\vee(0)=\langle1,\varphi\rangle,$$

因此

$$T_\alpha 1=1,\quad \text{在 } \mathbb{S}^*(K_p) \text{ 中}.$$

例 6.2.6 求 $T_\alpha\delta$.

解 由

$$T_\alpha\delta=\kappa_\alpha*\delta=\kappa_\alpha$$

立即得到

$$T_\alpha\delta=\kappa_\alpha,\quad \text{在 } \mathbb{S}^*(K_p) \text{ 中}.$$

3. 局部域 K_p 上的拟微分算子 T_α 的谱理论

与建立经典微分方程理论的思路相类似, 下面研究局部域 K_p 上的微分算子的谱理论.

首先介绍拟微分算子 T_α 在 Hilbert 空间 $L^2(K_p)$ 中的性质.

定义 6.2.4 (算子 T_α 的定义域)　设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 记函数集合

$$\mathbb{D}(T_\alpha)=\left\{f\in L^2(K_p):\langle\xi\rangle^\alpha f^\wedge(\xi)\in L^2(K_p)\right\}.$$

易见, $\mathbb{D}(T_\alpha)$ 是算子 T_α 在空间 $L^2(K_p)$ 中的定义域

$$\forall f\in\mathbb{D}(T_\alpha)\Rightarrow T_\alpha f=\left(\langle\xi\rangle^\alpha f^\wedge(\xi)\right)^\vee.$$

引理 6.2.3　$\langle\xi\rangle^\alpha\in L^2(K_p)$ 当且仅当 $\alpha<-\dfrac{1}{2}$.

证　由

$$\begin{aligned}\int_{K_p}\langle\xi\rangle^{2\alpha}\mathrm{d}\xi&=\int_{B^0}1\cdot\mathrm{d}\xi+\int_{K_p\setminus B^0}|\xi|^{2\alpha}\mathrm{d}\xi=1+\sum_{r=1}^{+\infty}p^{2\alpha r}p^r\left(1-p^{-1}\right)\\&=1+\left(1-p^{-1}\right)\sum_{r=1}^{+\infty}p^{(1+2\alpha)r}=\frac{p^{2\alpha}-1}{p^{2\alpha+1}-1},\end{aligned}$$

级数 $\sum\limits_{r=1}^{+\infty}p^{(1+2\alpha)r}$ 收敛, 当且仅当 $\alpha<-\dfrac{1}{2}$. 引理得证.

定理 6.2.8　对于算子 T_α 的定义域 $D(T_\alpha)$, 若 $\alpha\leqslant 0$, 则 $\mathbb{D}(T_\alpha)=L^2(K_p)$; 若 $\alpha>0$, 则 $\mathbb{D}(T_\alpha)\subsetneqq L^2(K_p)$. 进而, $\mathbb{D}(T_\alpha)$ 在 $L^2(K_p)$ 中稠密, $\overline{\mathbb{D}(T_\alpha)}=L^2(K_p)$.

证　若 $\alpha\leqslant 0$, 则 $\langle\xi\rangle^\alpha\leqslant 1$, 故由

$$f\in L^2(K_p)\Rightarrow f^\wedge\in L^2(K_p)\Rightarrow\left|\langle\xi\rangle^\alpha f^\wedge(\xi)\right|\leqslant\left|f^\wedge(\xi)\right|\in L^2(K_p)$$

知 $\mathbb{D}(T_\alpha)=L^2(K_p)$.

若 $\alpha>0$, 则由引理 6.2.3, 以及 Fourier 变换是 $L^2(K_p)$ 上的等距同构算子, 必存在 $g\in L^2(K_p)$, 使得 $g^\wedge(\xi)=\langle\xi\rangle^{-\alpha-\frac{1}{2}}\in L^2(K_p)$. 再据引理 6.2.3, 有

$$\langle\xi\rangle^\alpha g^\wedge=\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}\notin L^2(K_p),$$

因此, 虽然 $g\in L^2(K_p)$, 却有 $g\notin\mathbb{D}(T_\alpha)$, 故 $\mathbb{D}(T_\alpha)\subsetneqq L^2(K_p)$.

至于稠密性, 由 $\mathbb{S}(K_p)\subset\mathbb{D}(T_\alpha)$ 与 $\overline{\mathbb{S}(K_p)}=L^2(K_p)$ 得到.

定理 6.2.9　对于算子 T_α 的值域 $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha))$, 若 $\alpha\geqslant 0$, 则 $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha))=L^2(K_p)$; 若 $\alpha<0$, 则 $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha))\subsetneqq L^2(K_p)$. 进而, $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha))$ 在 $L^2(K_p)$ 中稠密, $\overline{T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha))}=L^2(K_p)$.

证　若 $\alpha\geqslant 0$, 则 $\langle\xi\rangle^{-\alpha}\leqslant 1$, 故取 $g\in L^2(K_p)$, 并考察方程 $T_\alpha f=g$, 则

$$f=T_{-\alpha}g=\left(\langle\xi\rangle^{-\alpha}g^\wedge\right)^\vee.$$

于是

$$g \in L^2(K_p) \Rightarrow g^\wedge \in L^2(K_p) \Rightarrow \langle\xi\rangle^{-\alpha} g^\wedge \in L^2(K_p)$$
$$\Rightarrow f = \left(\langle\xi\rangle^{-\alpha} g^\wedge\right)^\vee \in L^2(K_p) \Rightarrow T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha)) = L^2(K_p).$$

若 $\alpha < 0$, 则利用引理 6.2.3, 以及 Fourier 变换算子在 $L^2(K_p)$ 中的等距同构, 必存在 $g \in L^2(K_p)$, 使得 $g^\wedge(\xi) = \langle\xi\rangle^{\alpha-\frac{1}{2}} \in L^2(K_p)$. 于是, 可考察方程 $T_\alpha f = g$, 则

$$f = T_{-\alpha} g = \left(\langle\xi\rangle^{-\alpha} g^\wedge\right)^\vee = \left(\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}\right)^\vee \notin L^2(K_p).$$

从而, 不存在函数 $g \in L^2(K_p)$, 使得 $T_\alpha f = g$, 因此 $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha)) \subsetneqq L^2(K_p)$.

至于稠密性, 取 $\varphi \in \mathbb{S}(K_p)$, 则方程 $T_\alpha f = \varphi$ 在 $\mathbb{S}(K_p) \subset \mathbb{D}(T_\alpha)$ 中有唯一解, 从而 $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha)) \supset \mathbb{S}(K_p)$. 所以 $T_\alpha(\mathbb{D}(T_\alpha))$ 在 $L^2(K_p)$ 中稠密.

定理 6.2.10 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则算子 T_α 是 $L^2(K_p)$ 上的非负自伴算子.

证 利用 Parseval 等式, 容易得到, 对于 $\varphi, \psi \in \mathbb{D}(T_\alpha)$,

$$\langle T_\alpha \psi, \varphi\rangle = \left\langle T_{\frac{\alpha}{2}}\psi, T_{\frac{\alpha}{2}}\varphi\right\rangle = \int_{\Gamma_p} \langle\xi\rangle^\alpha \psi^\wedge(\xi)\overline{\varphi^\wedge}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

于是

$$\|T_\alpha\psi\|_2^2 = (T_\alpha\psi, T_\alpha\psi) = \int_{\Gamma_p} \langle\xi\rangle^{2\alpha} |\psi^\wedge(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi,$$

这里 $(T_\alpha\psi, T_\alpha\psi)$ 是 $L^2(K_p)$ 的内积. 这样, 有

$$(T_\alpha\psi, T_\alpha\psi) = \|T_\alpha\psi\|_2^2 > 0, \quad \forall\psi \in \mathbb{D}(T_\alpha),\ \psi \neq 0.$$

据非负自伴算子理论[88], 得到 $T_{\frac{\alpha}{2}} = (T_\alpha)^{\frac{1}{2}}$, 且

$$\mathbb{D}(T_\alpha) = \left\{\psi \in \mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right) : T_{\frac{\alpha}{2}}\psi \in \mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right\}.$$

进而, 存在 $L^2(K_p)$ 上的非负二次型 $Q^\alpha(\cdot,\cdot)$, 其定义域为

$$\mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right) \times \mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

使得

$$Q^\alpha(\varphi,\psi) = \left(T_{\frac{\alpha}{2}}\varphi, T_{\frac{\alpha}{2}}\psi\right), \quad (\varphi,\psi) \in \mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right) \times \mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

根据非负自伴算子理论, 引入新内积 $\overline{Q}^\alpha(\varphi,\psi) = Q^\alpha(\varphi,\psi) + (\varphi,\psi)$, 则

$$\left(\mathbb{D}\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right), \overline{Q}^\alpha\right)$$

成为一个 Hilbert 空间.

下面讨论拟微分算子 T_α 在 Hilbert 空间 $L^2(K_p)$ 中的固有值, 固有函数与完整直交系 (参看第 3.4.2 节).

为研究拟微分算子 T_α 在 $L^2(K_p)$ 空间中的固有值问题, 考虑方程

$$T_\alpha\psi=\lambda\psi,\quad \psi\in L^2(K_p). \tag{6.2.7}$$

由定理 6.2.10, 算子 T_α 的所有固有值 λ 为非负的, $\lambda\geqslant 0$.

设 $\lambda=0$, 则 (6.2.7) 成为 $T_\alpha\psi=0$, 这蕴含 $\psi=0$, 因此 $\lambda=0$ 不是固有值.

对于 $\lambda>0$, 将 (6.2.7) 写为 $(T_\alpha-\lambda)\psi=0$, 并作 Fourier 变换

$$0=(T_\alpha\psi-\lambda\psi)^\wedge(\xi)=(\langle\psi\rangle^\alpha-\lambda)\psi^\wedge(\xi),$$

由此知算子 T_α 的固有值具有形式

$$\lambda_N=p^{N\alpha},\quad N\in\mathbb{P}=\{0,1,2,\cdots\};$$

若 $L^2(K_p)$ 中存在由 T_α 的固有函数组成的完整直交系 $\{\psi_N(x)\}$, 则函数 $\psi_N(x)$ 的 Fourier 变换为

$$(\psi_N)^\wedge(\xi)=\begin{cases}\Phi_{\{|\xi|=p^{-N}\}}(\xi)\rho_N(\xi), & N>0,\\ \Phi_{\{|\xi|\leqslant 1\}}(\xi)\rho_0(\xi), & N=0,\end{cases}$$

其中

$$\Phi_{\{|\xi|=p^{-N}\}}(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|=p^{-N},\\ 0, & |\xi|\neq p^{-N},\end{cases}\quad \int_{\{|\xi|=p^{-N}\}}|\rho_N(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=1,\quad N\in\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},$$

$$\Phi_{\{|\xi|\leqslant 1\}}(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|\leqslant 1,\\ 0, & |\xi|>1,\end{cases}\quad \int_{\{|\xi|\leqslant 1\}}|\rho_0(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=1.$$

于是, 有

定理 6.2.11　设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 则算子 T_α 的固有值的集合为 $\{\lambda_N\}_{N=0}^{+\infty}$:

$$\{\lambda_N\}_{N=0}^{+\infty}=\begin{cases}\{1,p^\alpha,p^{2\alpha},\cdots\}, & \alpha>0,\\ \{1\}, & \alpha=0,\\ \{\cdots,p^{2\alpha},p^\alpha,1\}, & \alpha<0.\end{cases}$$

为构造由拟微分算子 T_α 的固有函数组成的 $L^2(K_p)$ 中的完整直交系, 先证明两个引理.

引理 6.2.4　设 $\psi(x)=\chi_{p^{-1}}(x)\Phi_{B^0}(x)$, 则 $\psi(x)$ 是算子 T_α 的一个固有函数, 即

$$T_\alpha\psi(x)=p^\alpha\psi(x),\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

证 易见

$$\psi^{\wedge}(\xi)=\int_{K_p}\chi_{p^{-1}}(x)\,\Phi_{B^0}(x)\,\overline{\chi}_\xi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{B^0}\chi\left(\left(p^{-1}-\xi\right)x\right)\mathrm{d}x=\Phi_{p^{-1}+\Gamma^0}(\xi),$$

且

$$\langle\xi\rangle^\alpha\psi^{\wedge}(\xi)=\langle\xi\rangle^\alpha\Phi_{p^{-1}+\Gamma^0}(\xi)=p^\alpha\Phi_{p^{-1}+\Gamma^0}(\xi).$$

因此

$$\begin{aligned}T_\alpha\psi(x)&=\left(\langle\xi\rangle^\alpha\psi^{\wedge}(\xi)\right)^{\vee}(x)=p^\alpha\int_{p^{-1}+\Gamma^0}\chi_\xi(x)\,\mathrm{d}\xi\\&=p^\alpha\int_{\Gamma^0}\chi_{p^{-1}}(x)\,\chi_\xi(x)\,\mathrm{d}\xi=p^\alpha\chi_{p^{-1}}(x)\int_{\Gamma^0}\chi_\xi(x)\,\mathrm{d}\xi\\&=p^\alpha\chi_{p^{-1}}(x)\,\Phi_{B^0}(x)=p^\alpha\psi(x).\end{aligned}$$

引理得证.

引理 6.2.5 设 $\psi(x)=\chi_{p^{-1}}(x)\,\Phi_{B^0}(x)$, $a,b\in K_p$, $a\neq0$, 则

$$T_\alpha\psi(ax+b)=\begin{cases}p^\alpha|a|^\alpha\psi(ax+b), & |a|>p^{-1},\\ \psi(ax+b), & |a|\leqslant p^{-1}.\end{cases}$$

证 $\psi(ax+b)$ 的 Fourier 变换为

$$(\psi(ax+b))^{\wedge}(\xi)=|a|^{-1}\chi_\xi\left(a^{-1}b\right)\psi^{\wedge}\left(a^{-1}\xi\right)=|a|^{-1}\chi_\xi\left(a^{-1}b\right)\Phi_{a(p^{-1}+\Gamma^0)}(\xi),$$

由此得

$$\begin{aligned}T_\alpha\psi(ax+b)&=\left(\langle\xi\rangle^\alpha(\psi(ax+b))^{\wedge}(\xi)\right)^{\vee}(x)\\&=\int_{\Gamma_p}\langle\xi\rangle^\alpha|a|^{-1}\chi_{a^{-1}b}(\xi)\,\Phi_{a(p^{-1}+\Gamma^0)}(\xi)\,\chi_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=|a|^{-1}\int_{a(p^{-1}+\Gamma^0)}\langle\xi\rangle^\alpha\chi_{x+a^{-1}b}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

若 $|a|\leqslant p^{-1}$, 则 $a\left(p^{-1}+\Gamma^0\right)\subset\Gamma^0$, 故

$$\begin{aligned}T_\alpha\psi(ax+b)&=|a|^{-1}\int_{a(p^{-1}+\Gamma^0)}\langle\xi\rangle^\alpha\chi_{x+a^{-1}b}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{\Gamma^0}\chi_{x+a^{-1}b}\left(a\left(p^{-1}+\xi\right)\right)\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\Gamma^0}\chi\left(p^{-1}(ax+b)\right)\chi(\xi(ax+b))\mathrm{d}\xi\\&=\chi\left(p^{-1}(ax+b)\right)\Phi_{B^0}(ax+b)=\psi(ax+b).\end{aligned}$$

若 $|a|>p^{-1}$, 则 $\forall\xi\in a\left(p^{-1}+\Gamma^0\right)$, 有 $|\xi|=p|a|$, 故

$$T_\alpha\psi(ax+b)=\int_{a(p^{-1}+\Gamma^0)}|\xi|^\alpha|a|^{-1}\chi_{x+a^{-1}b}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= p^{\alpha}|a|^{\alpha}\int_{a(p^{-1}+\Gamma^0)}|a|^{-1}\chi_{x+a^{-1}b}(\xi)\mathrm{d}\xi\\
&= p^{\alpha}|a|^{\alpha}\psi(ax+b).
\end{aligned}
$$

引理得证.

定理 6.2.12 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 则算子 T_α 的固有函数组成的集

$$
\left\{\psi_{N,j,I}: N\in\mathbb{Z}, j=1,\cdots,p-1, I=z_I+B^0\right\}
$$

组成 $L^2(K_p)$ 的完整直交基, 其中

$$
\psi_{N,j,I}(x)=p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{N-1}x\right)\Phi_{B^0}\left(p^Nx-z_I\right),\quad N\in\mathbb{Z},\ j=1,\cdots,p-1,\ I=z_I+B^0,
$$

且

$$
T_\alpha\psi_{1-N,j,I}(x)=\begin{cases} p^{N\alpha}\psi_{1-N,j,I}(x), & N>0,\\ \psi_{1-N,j,I}(x), & N\leqslant 0.\end{cases}\tag{6.2.8}
$$

证 第一步. 证 (6.2.8). 由

$$
\begin{aligned}
\psi_{N,j,I}(x) &= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{N-1}x\right)\Phi_{B^0}\left(p^Nx-z_I\right)\\
&= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}\left(p^Nx\right)\right)\Phi_{B^0}\left(p^Njx-jz_I\right)\\
&= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}z_I\right)\chi_j\left(p^{-1}\left(p^Nx-z_I\right)\right)\Phi_{B^0}\left(p^Njx-jz_I\right)\\
&= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}z_I\right)\psi\left(p^Njx-jz_I\right).
\end{aligned}
$$

若 $N<1$, 则 $\left|p^N\right|>p^{-1}$, 故

$$
\begin{aligned}
T_\alpha\psi_{N,j,I}(x) &= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}z_I\right)T_\alpha\psi\left(p^Njx-jz_I\right)\\
&= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}z_I\right)p^{\alpha}\left|p^N\right|^{\alpha}\psi\left(p^Njx-jz_I\right)\\
&= p^{(1-N)\alpha}\psi_{N,j,I}(x).
\end{aligned}
$$

若 $N\geqslant 1$, 则 $\left|p^N\right|\leqslant p^{-1}$, 故

$$
\begin{aligned}
T_\alpha\psi_{N,j,I}(x) &= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}z_I\right)T_\alpha\psi\left(p^Njx-jz_I\right)\\
&= p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{-1}z_I\right)\psi\left(p^Njx-jz_I\right)=\psi_{N,j,I}(x).
\end{aligned}
$$

将 N 换 $1-N$, 则 (6.2.8) 得证.

第二步. 证 $\{\psi_{N,j,I}\}$ 的直交性. 考察 $L^2(K_p)$ 的内积 $(\psi_{N,j,I},\psi_{N',j',I'})$, 有

$$
(\psi_{N,j,I},\psi_{N',j',I'})=\int_{p^{-N}I\bigcap p^{-N'}I'}p^{\frac{-N}{2}}\chi_j\left(p^{N-1}x\right)p^{\frac{-N'}{2}}\overline{\chi}_{j'}\left(p^{N'-1}x\right)\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&=\delta_{NN'}\int_{p^{-N}\left(I\bigcap I'\right)} p^{-N}\chi_j\left(p^{N-1}x\right)\overline{\chi}_{j'}\left(p^{N-1}x\right)\mathrm{d}x\\
&=\delta_{NN'}\delta_{II'}\int_{p^{-N}I} p^{-N}\chi_{j-j'}\left(p^{N-1}x\right)\mathrm{d}x=\delta_{NN'}\delta_{II'}\delta_{jj'}.
\end{aligned}
$$

又易证: $\forall\psi_{N,j,I}$ 有

$$
\int_{K_p}\psi_{N,j,I}(x)\,\mathrm{d}x=0.
$$

第三步. 证 $\{\psi_{N,j,I}\}$ 的完整性. 考察 Φ_{B^0} 的 Fourier 系数 $(\Phi_{B^0},\psi_{N,j,I})$, 有

$$
(\Phi_{B^0},\psi_{N,j,I})=p^{\frac{-N}{2}}\int_{B^0\cap p^{-N}I}\overline{\chi}_j\left(p^{N-1}x\right)\mathrm{d}x.
$$

若 $N\leqslant 0$, 则 $(\Phi_{B^0},\psi_{N,j,I})=0$; 若 $N\geqslant 0$, 则 $(\Phi_{B^0},\psi_{N,j,I})=p^{\frac{-N}{2}}\delta_{I,B^0}$, 因此

$$
\sum_{N,J,I}\left|(\Phi_{B^0},\psi_{N,j,I})\right|^2=(p-1)\sum_{N=1}^{+\infty}p^{-N}=1=\|\Phi_{B^0}\|_2^2.
$$

从而关于 Φ_{B^0} 的 Fourier 系数有 Parserval 等式成立. 完整性得证.

6.2.2 局部域上分形 PDE 的进一步研究

以上讨论了局部域 K_p 上拟微分算子 T_α 的性质, 为分形 PDE 作了一定的准备工作. 然而, 还有什么基础理论需要建立, 是摆在我们面前的重要问题. 这里仅提出一个为例.

1912 年, Weyl 证明了 "Weyl 渐近公式": 若区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 具有足够光滑的边界 Γ, 则对于 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x^j}+\lambda u=0, & (x_1,\cdots,x_n)\in\Omega,\\
u|_\Gamma=0
\end{cases}
$$

有渐近公式

$$
N(\lambda)\approx\varphi(\lambda),\quad \lambda\to+\infty,
$$

其中 $N(\lambda)=\#\{q\geqslant 1:\lambda_q\leqslant\lambda\}$ 称为固有值 λ 的计数函数, 固有值序列记为 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_q\leqslant\cdots$,

$$
\varphi(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^n}B_n\left|\Omega\right|_n\lambda^{\frac{n}{2}}
$$

称为 Weyl 项, 其中 B_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球的体积, $|\Omega|_n$ 是 Ω 的 Lebesgue 测度.

Weyl 的工作为微分方程关于固有值研究作了奠基性的工作, 一批数学家在 20 世纪中也作了卓越的贡献, 特别是关于 Weyl 猜想的一系列的工作, 包括当区域边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 在不同假设下所产生的各种情况时, 对 $N(\lambda)$ 所含各项的准确估计, 参看文献 [29] 及那里所引文献. 他们曾经得到, 对于 von Koch 型曲线为边界的分形鼓问题, 对于分形维数为 $d=\dfrac{3}{2}$ 的 von Koch 型曲线, 固有值计数函数

$$N(\lambda)=\frac{|D|_2}{4\pi}\lambda+O\left(\lambda^{\frac{d}{2}}\right),\quad \lambda\to+\infty,$$

其中固有值序列为 $\{\lambda_{m,n}\}_{m,n=1}^{+\infty}=\left\{\left(4^k\pi\right)^2\left(m^2+n^2\right)\right\}_{m,n=1}^{+\infty}$, $|D|_2$ 是 D 的二维 Lebesgue 测度 (面积).

可以考虑在 6.1 节中的两类偏微分方程的定解问题的 Weyl 猜想, 当求得问题的固有值序列后, Weyl-Berry 猜想呈何形状? Weyl 项当如何获得? 等等.

对于分形 PDE 的更进一步的研究, 都是当今的前沿课题[19],[56],[86],[91]~[93].

局部域上的调和分析与分形分析方兴未艾, 研究成果层出不穷, 交叉学科涉及面广, 应用前景宏图可望, 是一个值得为其奉献全力的研究领域.

思 考 题

1. 试证 $(\kappa_\alpha)^\wedge\in\mathbb{E}(K_p)$.
2. 试证定理 6.2.3.
3. 试证定理 6.2.5.
4. 对于局部域 K_p, Weyl 型猜想呈什么形式?
5. 为建立局部域 K_p 上的完整的 PDE 理论, 还需要做哪些准备工作? 还有哪些前沿课题?

第 7 章　局部域分析与分形分析在临床医学上的应用

数学科学在医学上的应用是很早以前科学家就非常关注的问题. 由于生物, 特别是人类的机体构造极其复杂, 生命机理涉及面极为广泛, 因此, 一直是生命科学家们最期望联合数学、物理、化学、生物、计算机等各方面的专家共同投入的一项系统工程.

数学科学在自然科学、社会科学、工程技术中都起着重要作用, 对于医学科学也不例外, 如传染病的传播问题、血药浓度问题、生物种群生长问题、微生物菌落增长问题、服药问题、肿瘤生长问题、血流量问题, 等等, 都有相应的数学模型, 并且利用这些数学模型解决了临床医学中的许多实际问题.

本章研究局部域分析与分形分析在人类肝脏肿瘤恶性程度诊断与治疗中的应用. 7.1 节介绍问题的起源、解决问题的思路; 7.2 给出问题的实际例子.

7.1　肝癌恶性程度的判定

7.1.1　肝癌的肆虐、解决的途径

1. 肝癌严重威胁我国人民的健康和生命

原发性肝癌 (以下简称肝癌) 是临床最常见的恶性肿瘤之一. 近年来, 肝癌的发病率在全球范围内呈上升趋势, 达到恶性肿瘤的第五位. 我国的肝癌发病人数占全球总发病人数的 55%, 是全世界肝癌发病率最高的国家. 在国内, 肝癌的发病率位于常见恶性肿瘤的第三位.

肝癌发病隐蔽, 转移复发快, 病死率高, 未经有效治疗的患者生存期仅 3~6 个月, 号称 "癌中之王". 据统计, 我国肝癌的死亡人数约占全世界的 45%, 位于国内常见恶性肿瘤的第二位, 对人民的健康和生命构成了严重威胁.

2. 医学影像学与外科学的发展, 部分解决了肝癌诊断问题

随着医学影像学及外科学的发展, 肝癌的诊断与治疗取得了长足的进步, 其中 B 型超声技术、多层螺旋 CT、核磁共振等现代影像学技术在肿瘤的定性、定位和分期中起着举足轻重的作用. 新型检查技术的应用, 使影像学不仅局限于对病灶形态学的描述, 还能对病灶的生物学特征进行分析.

研究发现, 肿瘤病灶的边缘形态反应出恶性肿瘤的生长方式和侵袭程度. 肝癌的边缘形态与甲胎蛋白 (AFP)、肿瘤增值细胞核抗原 (PCNA) 等血清与分子标志

物的表达有密不可分的联系, 在一定程度上反映了肝癌的恶性生物学行为. 另一方面, 肝癌高度的侵袭转移特性与肿瘤块中丰富的血管密切相关. 肝癌肿块中的血管形成受到多种生长因子的调节, 包括 P53 抗体与血管内皮生长因子 (VEGF)、碱性成纤维细胞生长因子 (bFGF). 研究结果表明, 这些因子的表达水平与肿瘤的影像学表现有着内在的联系. 因此, 需要在诊断肝癌的同时, 结合影像学与血液学指标, 更加深入地分析肝癌的生物学特性和转移侵袭特性, 才有可能对患者进行针对性治疗. 当前, 国际、国内的研究都还处于起步阶段.

3. 临床医学呼唤数学科学, 建立符合科学规律的肝癌分形模型

肿瘤形态的定量描述是长期以来困扰医学界的难题. 一方面, 是因为恶性肿瘤呈侵袭性生长, 其边缘非常不规则, 难以用经典的数学工具描述. 另一方面, 肿瘤的血管排列紊乱, 血管间出现许多畸形嫁接, 血管管径不规则, 分支增多, 血管内皮细胞排列不连续, 等等. 近年来, CT 等医学影像扫描的三维重建技术为描述肿瘤边界及其血管形态提供了新的方法. 计算机通过对一系列连续的二维图像进行边界识别等分割处理, 重新还原出被检查病患的病灶体的三维图像. 三维重建不但能精确地显示生物组织复杂的三维结构, 进行任意旋转、剖切等观察和操作, 还能对重建的三维结构进行测量. 以往对肿瘤边缘和血管形态的测量多基于传统的欧氏几何学, 无法对肿瘤不规则的边缘和复杂的血管做切合实际的定量描述.

1982 年, Mandelbort 在《自然界的分形几何学》一书 [34] 中提出, 自然界中的很多形态复杂的物体 (包括血管分布、肿瘤不规则的边界等) 有着其内在规律, 分形几何学为揭示这一规律提供了科学的方法. 分形维数 (fractal dimension) 是描述分形形体特征的重要参数, 其值越大, 形体的复杂程度越高. 然而, 数学模型的建立, 尚需通过数学科学研究与临床医学的紧密结合而最后完成.

4. 数学科学、医学影像学、分子生物学、临床医学的有机结合, 将为肝癌的治疗带来全新的理念, 造福全人类

分形几何学在医学中的应用是国际上的最新热点, 国际上的实例频频出现. 例如, Masters[35] 采用分形方法研究了正常人视网膜血管, 计算出分形维数值在 1.7 左右; Oczeretko 等 [37] 分别用面积周长法和盒维数法研究了肺癌的血管新生模式, 发现肿瘤血管的分形维数大于其拓扑维数, 具有分形特征; Guidolin 等 [15] 测量了血管抑素作用前后的血管网的变化, 提出分形可用于抗血管生成的疗效判定; Sabo 等[50] 对肾癌细胞的研究发现其血管分维不仅可以反映血管的复杂程度, 也提供了肿瘤的预后信息.

我国的前期研究也有显著效果, 例如, 测算出肝癌的分形维数值, 结合临床资料, 初步发现分形维数与肝癌侵袭转移具有显著的相关性. 这使人们清楚看到, 肝

癌的边缘形态和血管系统具有复杂的多级空间形态结构, 分形理论方法和三维图像技术的联合应用必将有利于肝癌研究的发展, 而三维图像数据的积累也为分形理论的深入提供参考资料. 另一方面, 我国的研究采用了最前沿的现代数学工具, 包含许多新数学概念、新数学方法, 特别是利用局部域分析与分形分析的工具, 与医学影像学、分子生物学以及临床医学资料有机地结合在一起, 为肝癌的个体化诊治带来了全新的理念[20],[39],[47],[52].

7.1.2 肝癌研究中的主要手段

在肝癌问题的研究中所采取的方式, 是临床医学研究方式与数学科学研究方式密切配合、相辅相成、交叉进行的, 最终目的是获得肝脏肿瘤的生成、诊断、发展、治疗的数学模型, 以指导今后的实际临床医学工作.

1. 构建肝癌及其血管的三维重建技术平台

三维技术平台的重建是至关重要的要求. 无论是 B 超、CT、核磁共振等, 所获得的影像资料都是二维的, 这对于确定肿瘤的恶性程度是很不够的. 由三维重建技术构建的肝癌病灶及血管的影像图形, 使医生对病患病情的确诊、诊治方案的设计有较为明确的参照资料, 因而影像资料的三维重建将起重要的辅助作用.

基于三维重建技术, 生成肿瘤病灶及血管图像的原状. 目前, 影像学三维重建技术已有一定程度的开展, 在使用这种重建技术的过程中进一步优化这一技术, 并使其转向实际临床应用.

对肿瘤生长、侵袭、转移过程中病灶与血管的形态, 三维重建的难度较高, 目前研究较少. 因此, 通过最新的影像学技术, 对肝癌病灶与血管进行三维重建是很关键的.

2. 利用患者的各种临床数据, 为建立数学模型积累资料

用肝癌患者的 B 超、CT、核磁共振等影像学资料, 对肿瘤病灶及其血管进行三维重建, 同时, 由临床的血清学检查、分子生物学检查获得的一系列数据也都是重要的相关资料, 为建立肝癌的生成、发展的数学模型作足够的准备. 特别是验证分形维数对于肿瘤病灶与血管形态的影响, 探讨肝癌病灶的边缘与血管以及它们的分形维数的关系, 作出精准的数据分析, 每一步都是必不可少的.

3. 利用建立的初步的数学模型, 确定正确的治疗方案

依据前两部分所获得数据, 建立初步的数学模型. 然后据初步的数学模型, 临床医生便可结合他们的经验、三维重建的图像、医学生化化验的数据, 判断、确诊病患的病情, 探讨其病因, 并确定治疗方案, 或肝癌的手术切除, 或介入治疗, 或分子靶向治疗, 或化疗等等.

4. 具体步骤

(1) 动物实验研究

医学方面的传统研究方法之一就是动物实验. 作动物肝癌病灶及血管的三维重建, 将为人类肝脏的三维重建提供预示与信息.

取兔肝癌细胞株 VX_2 复苏, 离心、纯化为细胞悬液. 取肿瘤细胞悬液 0.1ml(细胞数为 105) 注入实验用新西兰大白兔肝脏内. 10 天后观察肝脏肿瘤的形成. 将形成肝脏肿瘤的实验兔分别于 10 天、15 天、20 天、25 天进行螺旋 CT 扫描, 采用计算机三维成像技术重建肝脏肿瘤病灶与血管的三维图像. 将图片转换为灰度合适的大小, 增强对比度等. 将连续二维数字矩阵转换为三维数字矩阵, 通过可视化技术使三维数字矩阵转换为三维图形.

(2) 肝癌病灶与血管的分形数学模型的建立

使用前沿的现代数学工具, 如局部域 (local fields)、随机分形 (random fractals)、分形维数 (fractal dimensions)、分形上的偏微分方程 (partial differential equations (PDE) on fractals)、拟微分算子 (pseudo-differential operators)、分形动力学 (fractal dynamics) 等多种方法建立肝癌在生长、侵袭、转移过程中病灶及血管的分形数学模型, 这一方法目前国内外都给予极大的关注.

依据分形几何学的测量原理, 采用不同的数学工具, 编写分形分析软件. 将所得三维血管数字图像, 带入该软件进行分析. 对于不同时间点的每一例图像, 软件通过多次迭代, 得出相应的数值. 应用统计学进行两两比较, 探讨肝癌在生长、侵袭、转移过程中分形数学参数的变化.

(3) 临床研究

① 肝癌的临床影像学及病理学资料与分形数学模型的相关性. 选择近 5 年中具有完整影像学资料、病理学资料和临床资料的病例, 对 CT 及动脉造影图像进行三维重建. 将实际病历所获得的资料, 与分形数学模型所获得的资料进行对比, 以便了解肝癌病灶和血管分形数学参数与肿瘤的分型分期、复发转移、病人的生存率之间的关系.

另一方面, 采用组织芯片技术对肝癌组织的甲胎蛋白 (AFP)、肿瘤增值细胞核抗原 (PCNA)、P53 抗体和血管内皮生长因子 (VEGF)、碱性成纤维细胞生长因子 (bFGF) 等分子靶标进行检测, 分析数学参数与分子靶标的相关性.

② 肝癌的分形数学模型与个体化手术方案的制定. 选择合适的肝癌患者, 进行系统的影像学、血清学和分子生物学检查. 重点将病人的 CT 三维重建资料进行分形数学分析, 获得相应分形数学参数. 通过随访和资料收集, 总结不同肝癌病灶和血管的分形数学参数以及各种治疗方法疗效之间的内在关系, 用以指导临床治疗方案的选择.

归纳地, 关于人类肝癌的临床医学与数学科学的综合研究, 是通过最先进的医学设备, 如影像学手段、基因芯片、生物分子学化验等, 以及最近代的数学工具, 如局部域分析与分形分析, 建立肝癌的分形数学模型; 然后通过计算机程序设计与计算, 与所有的化验结果相比较, 检验并完善数学模型的清晰性、准确性; 继而, 以数学模型指导临床医师的诊断与选择, 确定治疗方案. 最后, 通过病患的随访、跟踪调查, 获得科学的结论.

使用现代数学科学的思维方法与抽象调和分析的工具, 研究肿瘤病灶的侵袭性、血管的复杂性, 不仅为临床医学提供了数学依据, 而且也体现并发挥了数学科学的普适性、应用性; 不仅解决了肝癌病灶的血管与肿瘤的分型分期、治疗方案的选择、肿瘤生存与复发期限等重要临床医学问题, 而且也将临床医学与多种分子生物学靶标以及数学科学紧密地联系在一起, 用于指导临床治疗方案的选择, 符合当今肝癌个体化治疗的方向, 在临床医学领域中也属于国内先进的范畴.

现代科学中的多学科交叉, 多学科之间的相互结合与相互渗透, 都得到充分的体现.

7.2 肝癌恶性程度研究的实例

临床医生通过病患肝脏的 CT 或核磁共振的胶片, 诊断并确定患者是否患肝癌, 决定是否进行手术. 外科医生的难度在于: 通常是凭经验、凭观察肿瘤表面的粗糙程度来诊断是否患肝癌? 其准确程度往往会出现偏差. 因此, 医生希望得到一种数据, 当肿瘤表面粗糙到何种程度, 就可诊断为肝癌? 然后根据肝癌恶性程度, 确定治疗方案, 是手术, 是化疗还是放疗?

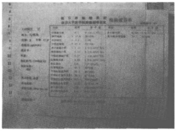
7.2.1 在肝癌患者的影像学资料中提取数据

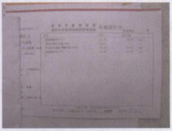
一方面, 通过肝癌患者的影像学资料, 主要是 B 型超声波、螺旋 CT、核磁共振, 提取肝癌病灶的数据; 另一方面, 通过血清学、分子生物学等检查所获得的数据, 与前者进行对比.

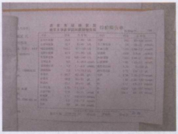
举两例如下:

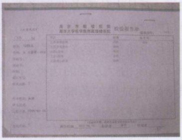
(1) 马 ×× 的治疗记录 (如图 7.2.1; 部分记录, 原件共 25 张).



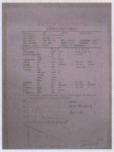






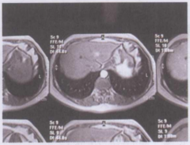


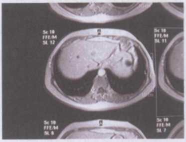




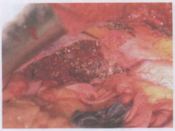

Sc 5
T1TFE/M


Sc 10
FFE/M
SL 12
Sc 10
FFE/M
SL 11


Sc 9
FFE/M


Sc 10
FFE/M
SL 12
Sc 10
FFE/M
SL 11
Sc 10
FFE/M
SL 8
Sc 10
FFE/M
SL 7





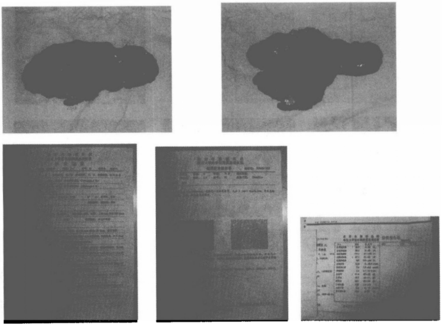
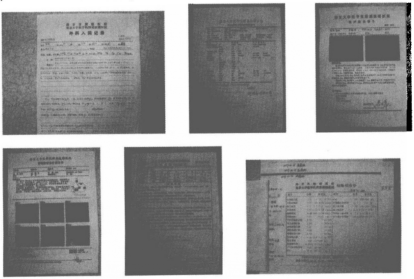
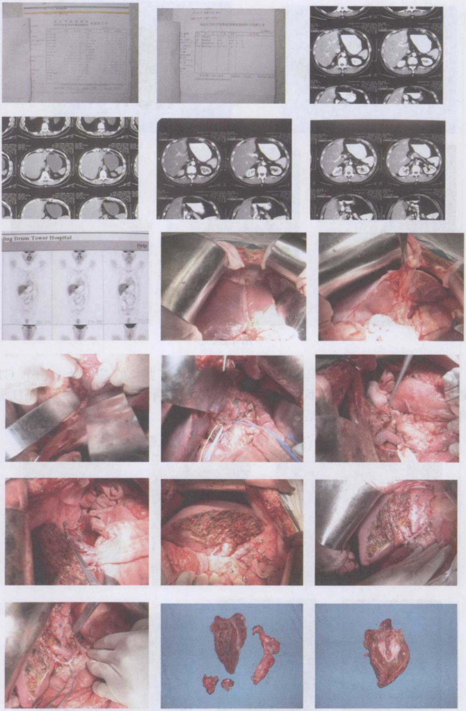


图 7.2.1

图 7.2.1 中分别是病患马×× 的手术前化验单 (5 张)、B 超记录 (2 张)、CT与核磁共振 (4 张)、手术时的照片 (2 张)、取出的肝癌病灶 (2 张)、手术记录 (1 张)、病理检查报告单 (1 张)、术后化验单 (1 张).

(2) 王 ×× 的治疗记录 (如图 7.2.2; 部分记录, 原件共 36 张).




Drum Tower Hospital
Help

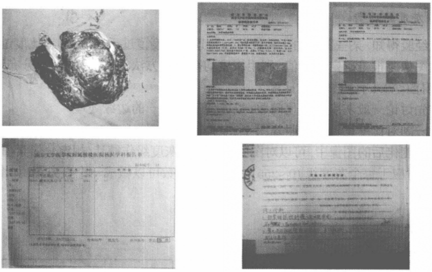


图 7.2.2

图 7.2.2 中分别是病患王 ×× 的入院记录 (1 张)、肝脏储备功能化验单 (1 张)、B 超记录 (1 张)、胃镜检查报告 (1 张)、核医学科 PEC/CT 室报告 (1 张)、生化化验报告 (3 张)、CT/核磁共振片 (5 张)、手术照片 (10 张)、取出的肝癌病灶 (2 张)、病理检查报告单 (2 张)、术后化验单 (2 张)、诊断记录 (1 张).

7.2.2 提取数据的数学处理

本小节的目的是研究肝癌病灶的边界的分形维数对肝癌恶性程度的影响. 计算方式设计选材于文献 [39], [47].

作为研究计算机处理图片的例子, 选择一幅 417×409 的肝脏血管的图片, 处理的软件为 Matlab, 如图 7.2.3 所示.

首先, 将这彩色图片灰度化, 也就是将图片中各个像素点的红、绿、蓝三元值各自乘上一定的权值, 得到的数值作为其灰度值, Matlab 中有专门函数, 即 rgb2- gray, 其转换公式为 $\text{gray}=r*0.299+g*0.587+b*0.114$. 灰度化后如图 7.2.4 所示.



图 7.2.3



图 7.2.4

1. 灰度的均衡

由经验得知, 某些图像由于其物体与背景间灰度值过于接近, 即对比度过小, 导致处理图像时很难确定边界值. 利用灰度均衡化的方法, 将图片的灰度分布进行拉升, 使得图 7.2.4 有明显的对比度.

首先讨论一般灰度均衡化问题, 以方便后面统一的边缘处理.

以一副对比度比较差的照片图 7.2.5 为例.

从灰度化后的图像中, 可以对图的像素点的灰度级作统计, 规定总像素值为 256 色, 这样对应于每个灰度级 (0~255) 的像素点个数可以做成一个直方图, 如图 7.2.6 所示.

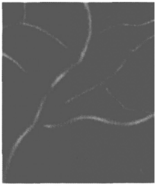


图 7.2.5

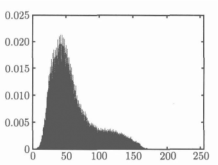


图 7.2.6

从图上可以看出, 图片的灰度级在 50 处有明显的高峰. 这样, 不均衡的灰度级分布会使得在测边缘上求梯度时不够明显, 因此有必要进行灰度均衡化.

所谓灰度均衡化, 就是将直方图中的灰度级作一个函数变换, 使得点较为集中的灰度级拉伸一些, 点较为稀疏的灰度级收缩一些, 从而达到各灰度级均衡的效果.

函数变换公式的推导如下: 假设原图的总像素个数为 N, 灰度级一共有 D_m 个 (取 256), 原图的直方图函数为 $H_A(D)$, 变换为 $D_B = f(D_A)$, 变换后的直方图函数为 $H_B(D)$. 那么, 在原图中 $D \leqslant D_A$ 的点的个数与变换后图中 $D \leqslant D_B$ 的点的个数应该相同, 即

$$\int_0^{D_A} H_A(D)\,\mathrm{d}D = \int_0^{D_B} H_B(D)\,\mathrm{d}D.$$

两边对 D_A 求导数, 得

$$H_A(D_A) = H_B(D_B)\frac{\mathrm{d}D_B}{\mathrm{d}D_A} = H_B(D_B)\,f'(D_A),$$

于是

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{f'(D_A)}.$$

要使得变换后的直方图灰度均衡, 就是要求 $H_B(D_B) = \frac{D_m}{N}$, 代入上式, 得到

$$f'(D_A) = \frac{D_m}{N} H_A(D_A).$$

两边对 $t \equiv D_A$ 积分, 得到 $f(D) = \frac{D_m}{N}\int_0^D H_A(t)\,\mathrm{d}t$, 这就是变换函数. 将其离散化, 并称其为 CDF 函数:

$$\mathrm{CDF}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{t} H_A(t).$$

然后, 对灰度值 t, 用 $\mathrm{CDF}(t)\,D_m$ 作为新的灰度值. 得到直方图均衡化后的图像, 如图 7.2.7 所示.

将下图与原图灰度化后相比, 可以看到对比度有了很明显的上升. 灰度均衡化后的直方图如图 7.2.8 所示.

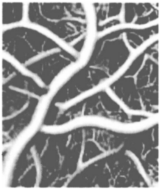


图 7.2.7

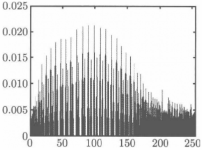


图 7.2.8

经过灰度均衡化后, 整个图像对比度已相对较高, 下面就选择算法提取图像中所需检测的边缘.

2. 边缘检测

(1) 高斯滤波.

考虑到所得图像往往有很多噪声, 而且所研究的对象正是图像较细致的结构, 故对噪声一定很敏感, 因此在对图像做边缘检测之前有必要对其进行滤波来去噪. 下面所用的滤波方法为高斯滤波法.

高斯函数即正态分布函数, 常用作加权函数, 二维高斯函数如下:

$$G(x,y) = \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

采用高斯模板进行图像的平滑, 一是因为二维高斯函数具有旋转对称性, 保证滤波时各方向平滑程度相同; 二是在高斯模板中, 离中心点越远权值越小, 确保边缘细节不被模糊. 取经验参数 $\sigma^2 = 2, n = 5$, 见表 7.2.1 所示.

表 7.2.1

[i, j]	−2	−1	0	1	2
−2	0.105	0.287	0.135	0.287	0.105
−1	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287
0	0.135	0.779	1	0.779	0.135
1	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287
2	0.105	0.287	0.135	0.287	0.105

将其整数化、归一化后, 得表 7.2.2.

表 7.2.2

[i, j]	−2	−1	0	1	2
−2	1	2	3	2	1
−1	2	4	6	4	2
0	3	6	7	6	3
1	2	4	6	4	2
2	1	2	3	2	1

比例系数为 1/100.

该矩阵即为 $n = 5$ 的滤波等效矩阵. 以源图像每一点为中心, 经过与等效矩阵卷积, 便完成滤波过程.

对灰度化后的图像经过高斯滤波, 所得的图像即可进行边缘检测.

(2) 提取边缘.

边缘检测的实质是提取出图像中对象与背景间的交界线, 因此不妨对边缘先行确定. 边缘是指图像中灰度发生急剧变化的区域的边界.

图像灰度的变化情况, 可以用图像灰度的梯度来反映, 因此可以通过对局部图像微分来进行边缘检测. 经典的边缘检测方法是对原始图像中像素的某小邻域来构造边缘检测算子.

假设给定连续函数 $f(x,y)$, 其方向导数在边缘法线方向上取得局部最大值. $f(x,y)$ 在 θ 方向沿 r 的梯度为

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta,$$

$\frac{\partial f}{\partial r}$ 取最大值的条件是 $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)=0$, 即 $-f_x\sin\theta_g+f_y\cos\theta_g=0$, 其中 $\theta_g=\arctan\frac{f_y}{f_x}$. 于是梯度最大值为

$$g=\max\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\sqrt{f_x^2+f_y^2}.$$

为减少计算量, 用 $g=|f_x|+|f_y|$ 近似代替.

以这些理论为依据, 可以设计许多算法. 常用的边缘检测方法有: Sobel 边缘检测算子、Prewitt 边缘检测算子、Roberts 边缘检测算子、Marr 边缘检测算子、Canny 边缘检测算子等等.

实际操作中, 由于 Canny 算子有明显的精确性优势, 故选用 Canny 算法来实现边缘检测.

边缘提取的基本问题是解决增强边缘与抗噪能力间的矛盾. 由于图像边缘与噪声在频率域中同是高频分量, 简单的微分提取运算同样会增加图像中的噪声, 故一般在微分运算之前, 应采取适当的平滑滤波, 减少噪声的影响. Canny 算法的实质是用一个准高斯函数作平滑运算, 然后以带方向的一阶微分来定位导数的最大值. Canny 算子边缘检测是一种比较实用的边缘检测算子, 具有很好的边缘检测性能.

Canny 边缘检测法利用高斯函数的一阶微分, 能在噪声抑制和边缘检测之间取得较好的平衡.

Canny 边缘检测算法主要步骤:

第 1 步. 用高斯滤波器平滑图像.

第 2 步. 用一阶偏导数的有限差分来计算梯度的幅值与方向.

在这一步, 可以任选一个一阶算子来计算图像在两个正交方向上的梯度, 取一种更为有效的等效矩阵:

$$H=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

第 3 步. 对梯度幅值进行非极大值抑制.

在 Canny 算法中, 仅仅得到全局的梯度并不足以确定边缘, 因此, 为确定边缘, 必须保留局部梯度最大的点, 而抑制非极大值. 具体做法是利用梯度的方向, 将一点的 8 个邻域分为四个方向, 或表示为图 7.2.9.

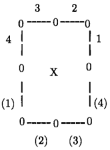


图 7.2.9

假设局部梯度分别为 G_x, G_y, 根据其梯度方向 G_x/G_y 判断在哪一个方向内, 并将该点在全局梯度上的值与该方向上的两个邻点相比, 若其不是最大的, 则可以肯定其不是边缘点, 即进行的 “非极大抑制”.

第 4 步. 用双阈值算法检测与连接边缘.

根据全局梯度的灰度直方图计算出高阈值 (highthresh), 低阈值通常选取为 lowthresh= highthresh/2.

对于在全局梯度图像中小于低阈值的点, 肯定不是边缘点; 大于高阈值的点则肯定是边缘点; 对于处于二者之间的点, 其为边缘点的条件是: 当且仅当其 8 邻域内有边缘点. 通常的做法是将所有大于低阈值的点先设为边缘点, 再从大于高阈值的点出发, 对二值图像做深度遍历寻找连通分量来连接边缘.

(3) 细化算法.

对于经过初步边缘检测后的图像, 其边缘往往都很粗糙, 可以通过对图像进行细化来增强边缘效果.

本文采用 Zhang-Suen 骨架细化算法, 这个算法快速且易于实现, 效果也很理想. 在这个算法中, 每一次迭代有两个子迭代, 分别完成对于两种简单边界点的删除以达到细化目的; 当图像随着迭代而不产生变化时, 算法便终止.

在第一次子迭代中, 设满足下列条件的 3×3 的二值矩阵的中间点为 $I(i,j)$, 则该点满足下列 4 个条件时即可删除:

① 只有一个连通分量;

② 中间点的邻居中, 1 个数在 2 到 6 之间;

③ 在 $I(i,j+1), I(i-1,j), I(i,j-1)$ 中至少有一个为 0;

④ 在 $I(i-1,j), I(i+1,j), I(i,j-1)$ 中至少有一个为 0.

在第二次子迭代中, 设满足下列条件的 3×3 的二值矩阵的中间点为 $I(i,j)$, 则该点满足下列 4 个条件时即可删除:

① 只有一个连通分量;

② 中间点的邻居中, 1 个数在 2 到 6 之间;

③ 在 $I(i-1,j), I(i,j+1), I(i+1,j)$ 至少有一个为 0;

④ 在 $I(i,j+1), I(i+1,j), I(i,j-1)$ 至少有一个为 0.

程序流程图为图 7.2.10.

回到最初的图像, 图 7.2.3, 经过边缘检测所得结果为图 7.2.11.

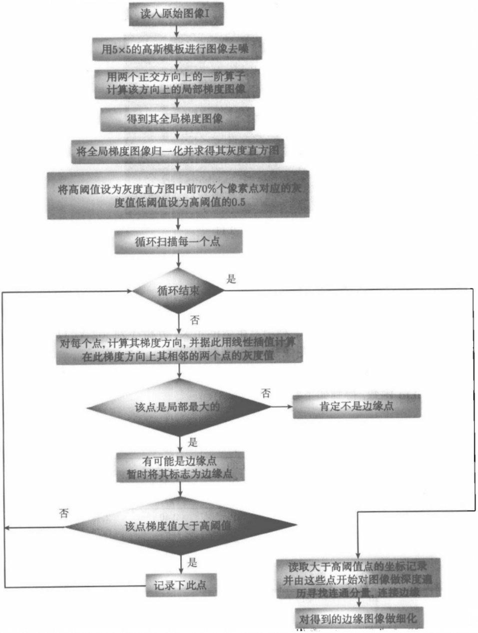

读入原始图像I
用5×5的高斯模板进行图像去噪
用两个正交方向上的一阶算子
计算该方向上的局部梯度图像
得到其全局梯度图像
将全局梯度图像归一化并求得其灰度直方图
将高阈值设为灰度直方图中前70%个像素点对应的灰
度值低阈值设为高阈值的0.5
循环扫描每一个点
循环结束
是
否
对每个点,计算其梯度方向,并据此用线性插值计算
在此梯度方向上其相邻的两个点的灰度值
该点是局部最大的
否
肯定不是边缘点
是
有可能是边缘点
暂时将其标志为边缘点
否
该点梯度值大于高阈值
是
记录下此点
读取大于高阈值点的坐标记录
并由这些点开始对图像做深度遍
历寻找连通分量,连接边缘
对得到的边缘图像做细化

图 7.2.10

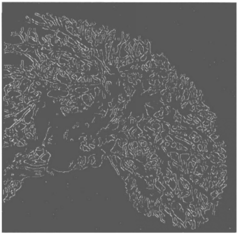


图 7.2.11

7.2.3 分形维数的计算

1. 由基本定义得到的计算结果

在灰度均衡化与获取图像边缘 F 的基础上, 利用盒维数的定义, 取一个序列 δ_k 作为 δ 网立方体的网格边长, 利用盒维数的定义, 分析序列 $\log N_{\delta_k}(F)$ 与 δ_k 的关系, 试图找出这两组数据与图像 F 的盒维数的关系.

考虑到图像的像素问题, 所采取的序列 $\{\delta_k\}=\{2,3,4,\cdots,24,25\}$(单位: 像素), 通过 getdim.m 函数, 得到如下数据 (表 7.2.3):

表 7.2.3

δ_k	2	3	4	5	6	7
$\ln\delta_k$	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95
$\ln N_{\delta_k}$	9.88	9.31	8.87	8.48	8.14	7.84
δ_k	8	9	10	11	12	13
$\ln\delta_k$	2.08	2.20	2.30	2.40	2.48	2.56
$\ln N_{\delta_k}$	7.58	7.35	7.15	6.96	6.79	6.63
δ_k	14	15	16	17	18	19
$\ln\delta_k$	2.64	2.71	2.77	2.83	2.89	2.94
$\ln N_{\delta_k}$	6.47	6.35	6.22	6.09	5.99	5.89
δ_k	20	21	22	23	24	25
$\ln\delta_k$	3.00	3.04	3.09	3.14	3.18	3.22
$\ln N_{\delta_k}$	5.77	5.70	5.59	5.53	5.44	5.35

但是, 由于网格边长 δ_k 的单位问题, 会出现如下现象:

① 得到的 24 个数据 $-\log N_{\delta_k}(F)/\log\delta_k$ 均为负值, 这显然不符合盒维数的要求;

② δ_k=1 时, 该定义是无法计算的.

考虑到出现这些问题的原因在于分母没有一个明确的单位, 为方便计算机计算, 可以人为地决定 δ_k 的单位为 1 像素. 然而, 实际的单位是什么意义很难确定, 因此, 不妨假设实际的 1 单位为 $1 = C\delta_k$, C 为任意常数, 其任何变形仍然记为 C.

盒维数也可表示为

$$\dim_B F = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta + C},$$

此公式实际上只是改变网格边长 δ 的单位, 但给出了解决思路. 这个定义只有在极限情况下才会不受单位的影响. 由于现实的图像的像素有限, 无法做到网格边长充分小. 所以, 计算过程中, 上述定义中极限的收敛速度, 与网格边长的单位, 也就是公式中的常数 C, 有很大关系. 因此, 希望寻找一个常数 C_0, 使得 $C = C_0$ 时, 该极限的收敛速度最快.

2. 对数据的线性拟合

网格边长序列 $\{\delta_k\}_{k=2}^{25}$ 的最大值与图像的像素 409×417 相比很小, 因此可以假设序列 $\{\lambda_k\}_{k=2}^{25}$ 比较接近盒维数的真值 $\dim_B F$(在误差允许范围内), 其中 $\lambda_k = \dfrac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k + C_0}$.

在如上的假设下, 序列 $\{\log N_{\delta_k}(F)\}$ 与序列 $\{-\log\delta_k\}$ 应该满足很好的线性关系. 事实上, 这两个序列的点图如图 7.2.12 与图 7.2.13 所示, 满足不错的线性关系.

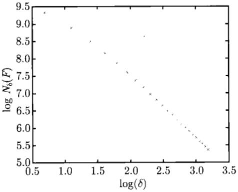


图 7.2.12

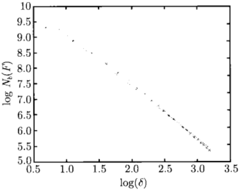


图 7.2.13

对这 24 组数据进行线性回归后得到如下拟合结果:

$$\log N_\delta(F) = -1.6712\log\delta + 10.7422,$$

即所得维数近似值为 1.6712.

3. 对数据的双曲外推拟合

观察盒维数定义可知, 维数的真实解应该在无限细分 δ 网的情况下取得. 然而, 由于照片的像素限制, 细分是有限制的. 例如, 像素为 400*400, 最多细分到格子边长为 1 像素. 之所以利用线性拟合, 是发现 $\log N_\delta(F)$ 与 $\log\delta$ 之间已经满足较好的线性关系. 但仔细观察后, 发现在细分网格变长逐渐减小至接近 1 时, 图像斜率开始有减小的趋势. 引起该趋势的原因有两种:

① 在 δ 接近 1 时, 由于图像本身有很多噪声, 这些噪声本身很难从去噪过程中完全滤去, 而在 δ 接近 1 时, 噪声所产生的影响会由于采集数据的细化而变大;

② 在 δ 越来越小时, 斜率更接近于真值, 并且由公式 $\lambda_k = \dfrac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k + C_0}$ 得到, δ 越来越小时, λ_k 有可能越来越小.

综合以上两种情况, 由于噪音造成的误差是无法避免的, 并且是不可预测的, 因此要舍掉离 1 最近的最后两点.

由盒维数定义, 寻找另一种拟合方法, 使得最终结果能很好的吻合定义中的取极限过程.

仔细观察图 7.2.12 的弯曲形态, 发现图像与双曲线比较相似, 于是考虑用比较常用的双曲外推, 且极限比例值恰好为双曲线渐近线斜率的绝对值的倒数.

于是, 取边长为 $\delta_i = i$, $i = 2, 3, \cdots, 24, 25$ 的 δ 网, 得到 $\log N_\delta(F)$ 与 $\log\delta$ 的数据如图 7.2.14 和图 7.2.15 所示.

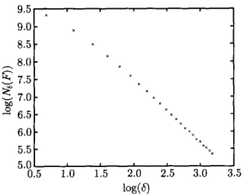


图 7.2.14

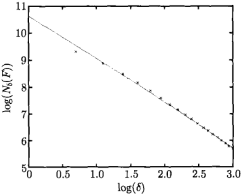


图 7.2.15

用双曲方程标准式对其拟合得到双曲方程为

$$\frac{(x-6.6978)^2}{0.6772^2} - (y-1.2445)^2 = 3.1473^2,$$

图像拟合度为 $r = 0.0839$. 故最终图像维数为 $\dim_B F = 1/0.6772 = 1.4768$.

编好程序, 对 F 进行盒维数 $\dim_B F$ 计算, 获得 $\dim_B F$ 的值. 得到的 $\dim_B F$ 是一个近似值. 这个值是否就是肝癌病灶图像边缘 G 的盒维数 $\dim_B G$ 呢? 显然是

有误差的. 但是可以将 $\dim_B F$ 近似代替 $\dim_B G$, 看 $\dim_B F$ 如何随患者的病情而改变, 从而得出规律, 提炼出肝癌恶性程度随 $\dim_B F$ 改变的数学模型.

7.2.4 分析多例病患资料得出规律, 归纳得到数学模型

在研究工作中, 应当进行足够多的肝癌病患的数据计算、分析, 然后归纳出数学模型, 对于肝癌恶性程度的数学模型也是如此.

在 300 例数据分析后, 得到一个初步的结论: 肝癌恶性程度与病灶边界的分形维数呈近似的线性关系.

获得初步的数学模型后, 还要检验数学模型的准确性. 目前正在用两种方式进行检验: (1) 对于近 300 位病患进行随访调查; (2) 将模型用于新的病患, 这样的试验对模型的准确性更具有挑战性.

7.2.5 肝癌研究中的其他问题

1. *辅助性部分肝移植*(auxiliary partial orthotopic liver transplantation, APOLT)

在活体肝移植时, 首先去除受体中坏肝的部分, 再从供体上取出一部分健康肝进行移植, 使得供体不受损害, 而受体又得益而生存, 见图 7.2.16.

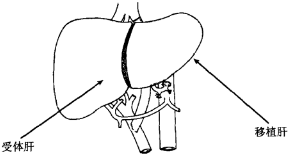


图 7.2.16

计算出从供体中切下多少, 是最好的可能性, 协助医生用数学方法作科学的选择.

这个问题与病肝的恶性程度、健康肝的质量都有极大的关系, 是一个有很大难度的课题. 目前国际、国内数学界、医学界对这个问题都有极大的兴趣.

2. *寻找控制肝癌的基因* (genes which control liver cancers)

利用医生提供的基因芯片, 用统计方法, 把对肝癌起作用的基因找出来. 这个工作的意义很大, 为医学科学的基因修复工程提供的理论依据. 这是一项与生命科学、临床医学都有极大关系的基础研究工作, 对人类基因功能的研究 (人类基因组虽然已经破译, 但哪个基因控制人类体征的哪一部分, 却远远没有解决)、对生命科学的发展、对临床医学的指导, 意义都是不可估量的.

参 考 文 献

[1] 齐民友. 线性偏微分算子引论 (上). 科学出版社, 1986.

[2] 苏维宜. 近代分析引论. 北京大学出版社, 2000.

[3] 沙震, 阮火军. 分形与拟合. 浙江大学出版社, 2005.

[4] 文志英等. 分形几何理论与应用. 浙江科学技术出版社, 1998.

[5] 文志英. 分形几何的数学基础. 上海科技教育出版社, 2000.

[6] 张禾瑞. 近世代数基础. 人民教育出版社, 1978.

[7] 郑维行, 苏维宜, 任福贤. 沃尔什函数理论与应用. 上海科技出版社, 1983.

[8] Barnsley M. Fractals Everywhere. *Academic Press, INC.*, 1988.

[9] Butzer P L and Nessel H J. Fourier 分析与逼近论. 第一卷 (上). 郑维行, 苏维宜, 任福贤, 何泽霖译. 高等教育出版社, 1985.

[10] Butzer P L and Wagner H J. Walsh-Fourier series and the concept of a derivative. *Applicable Anal.*, 1973, 3: 29-46.

[11] Butzer P L and Wagner H J. An extension of the dyadic calculus with fractional order derivatives, further theory and applications. *Comp. & Math with Appl.*, 1986, 12A(8): 921-943.

[12] Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. *Cambridge Univ. Press*, 1985.

[13] Falconer K J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. *Chichester, Wiley*, 1990.

[14] Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry. *Chichester, Wiley*, 1998.

[15] Guidolin D, Vacca A, Mussdorfer G G et al. A new image analysis method based on topological and fractal parameters to evaluate the angiostatic activity of docetaxel by using the Matrigel assay in vitro. *Microvasc Res.*, 2004, 67(2): 117-124.

[16] Gibbs J E and Millard M J. Walsh functions as solution of a logical differential equations. *NPL DES Rept.* 1, 1969.

[17] Gibbs J E and Millard M J. Some methods of solution of linear ordinary logical differential equations. *NPL DES Rept.* 2, 1969.

[18] Gibbs J E and Ireland B. Some generalizations of the logical derivatives. *NPL DES Rept.* 8, 1971.

[19] Gibbs J E and Stankovic R S. Why IWGO? A look at the bibliography of Gibbs derivatives. *Theory And Applications of Gibbs Derivatives*, Butzer P L and Stankovic R S (Eds), Beograd, xi—xxiv, 1990.

[20] Gu Q S. Wave equations with fractal boundaries. *Undergraduate Thesis of Nanjing University, Department of Mathematics*, 2010.

[21] He Z L and Mustard D. Convergence properties of a class of Walsh-Fourier integral operators. *Proc. of the First International Workshop on Gibbs Derivatives, Kupari-Dubrovnik Yugoslavia*, 1989: 145-156.

[22] He Z L. Notes on approximations of Walsh functions (Chinese). *J. of Nanjing Univ.*, 1981, 4: 409-418.

[23] He Z L. An approximation theorem on p-adic Walsh-Fejér operators with some corollaries (Chinese). *J. of Nanjing Univ.*, 1982, 3: 585-597.

[24] He Z L. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh-Fourier analysis with applications to approximation theory. *J. of Approx. Theory (U.S.A.)* , 1983, 39: 361-373.

[25] He Z L. A class of approximation operators and best approximation over $L^p(G)$, $1 < p < \infty$, $G = \mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{Z}$. *Chinese J. of Contemporary Math.*, 1988, 9(2): 215-224.

[26] Hewitt E and Ross K A. Abstract Harmonic Analysis, I. *Berlin*: *Springer-Verlag*, 1979.

[27] Jiang H K. The kernels of de la Vallée-Poussin type on p-adic fields. *Approx. Theory & Appl.*, 1990, 6(1): 65-79.

[28] Jiang H K. The derivatives and integrals of functional order on a-adic groups. *Chin. Ann.of Math., Ser.B*, 1993, 14(4): 515-526.

[29] Lapidus M L. Vibrations of fractal drum, the Riemann hypothesis, waves in fractal media and the Weyl-Berry conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1991, 325: 465-529.

[30] Li Y and Su W Y. Random a-adic groups and random net fractals. *Chaos, Soliton & Fractals*, 2008, 37: 807-816.

[31] Ma L T. Two dimensional wave equations with fractal boundaries. *Phd Thesis of Nanjing University, Department of Mathematics* (Chinese), 2009.

[32] Mandelbrot B B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 1967, 155: 636-638.

[33] Mandelbrot B B. Fractals: Form, Chance and Dimension. *San Francisco*: *W.H. Freeman & Co.*, 1977.

[34] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. *San Francisco*: *W.H. Freeman & Co.*, 1982.

[35] Masters B R. Fractal analysis of the vascular tree in the human retina. *Annu Rev Biomed Eng.*, 2004, 6(4): 27-52.

[36] Mattila P. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability. *Cambridge*: *Cambridge Univ. Press*, 1995.

[37] Oczeretko E, Juczewska M and Kasacka I. Fractal geometric analysis of lung cancer angiogenic patterns. *Folia Histochem Cytobiol*, 2001, 39(2): 75-76.

[38] Onneweer C W and Su W Y. Homogeneous Besov spaces on locally compact Vilenkin groups. *Studia Mathematica*, 1989, T.XCIII: 17-39.

[39] Peng Y. Fractal dimension calculation of two dimension images with computer programming. *Undergraduate Thesis of Nanjing University, Department of Mathematics*, 2010.

[40] Qiu H and Su W Y. Weierstrass-like functions on local fields and their p-adic derivatives. *Chaos, Soliton & Fractals*, 2006, 28: 958-965.

[41] Qiu H and Su W Y. Measures and dimensions of fractal sets in local fields. *Progress in Natural Sci.*, 2006, 16(12): 1260-1268.

[42] Qiu H and Su W Y. 3-adic Cantor function on local fields and its p-adic derivative. *Chaos, Soliton & Fractals*, 2007, 33: 1625-1634.

[43] Qiu H and Su W Y. The connection between the orders of p-adic calculus and the dimensions of Weierstrass type function in local fields. *Fractals*, 2007, 15(3): 279-287.

[44] Qiu H, Su W Y and Li Y. On the Hausdorff dimension of certain Riesz product in local fields. *Analysis in Theory and Appl.*, 2007, 23(2): 147-161.

[45] Qiu H and Su W Y. Distributional dimension of fractal sets in local fields. *Acta. Math. Sinaca (Eng.)*, 2008, 24(1): 147-158.

[46] Qiu H and Su W Y. Pseudo-differential operators on p-adic fields (Chinese), *Science in China.*, 2011, 41(1): 1-15.

[47] Qiu Y D, Su W Y, Chen J and Qiu H. The malignant case of a cancer, determined by fractal dimensions of boundaries(Chinese) to appear., 2011.

[48] Ren F X, Su W Y and Zheng W X. The generalized logical derivatives and its applications (Chinese). *J. of Nanjing Univ.*, 1978, 3: 1-8.

[49] Ruan H J, Su W Y and Yao K. Box dimension and fractional integral of linear interpolation functions. *J. of Approx. Theory*, 2009, 161, 187-197.

[50] Sabo E, Boltenko A, Sova Y, et al. Microscopic analysis and significance of vascular architectural complexity in renal cell carcinoma. *Clin Cancer Res.*, 2001, 7(3): 533-537.

[51] Sadosky C. Interpolation of Operators and Singular Integrals. *Springer-Verlag*, 1979.

[52] Shen K M. Study on two dimensional wave equations with fractal boundaries on local fields (Chinese). *Undergraduate Thesis of Nanjing University, Department of Mathematics*, 2010.

[53] Stankovic R S and Astola J. Gibbs derivatives. *Walsh and Dyadic Analysis, Proceedings of the workshop dedicated to the memory of James Edmund Gibbs*, 2007: 153-170. Held in Oct. 18-19, 2007, Nis Serbia.

[54] Stankovic R S and Astola J. Remarks on the development and recent results in the theory of Gibbs derivatives. *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics, University of Nis*, 2008, 21(3): 349-364. *Proceedings of discrete analysis and related areas, Workshop on Discrete Analysis and Applications*, held in Sep. 27-29, 2008, Thessaloniki, Greece.

[55] Su W Y and Chen G X. Lipschitz classes on local fields. *Science in China, Ser.A, Math.*, 2007, 50(7): 1005-1014.

[56] Su W Y and Qiu H. p-adic calculus and its applications to fractal analysis and medical science. *Facta Uinversitatis, Series: Electronics and Energetics, University of Nis*, 2008, 21(3): 339-348. *Proceedings of discrete analysis and related areas, Workshop on Discrete Analysis and Applications*, held in Sep. 27-29, 2008. Thessaloniki, Greece .

[57] Su W Y and Xu Q. Function spaces on local fields. *Science in China, Ser.A, Math.*, 2006, 49(1): 66-74.

[58] Su W Y and Zheng W X. On the theory of approximation operators over local fields. *Approx. Theory V(Texas U.S.A.)*, 1986: 579-582.

[59] Su W Y. An introduction to Walsh functions (Chinese). *Proceedings in Digit Techniques and Applications, Wuxi, China*, 1976: 298-328.

[60] Su W Y. On an extremum problem for n-variable Walsh transformations (Chinese). *J. of Nanjing Univ.*, 1980, 2: 6-14.

[61] Su W Y. The kernels of Abel-Poisson type on Walsh system. *Chin. Ann. of Math., Ser.B*, 1981, 2: 81-92.

[62] Su W Y. A proof of the Jackson type theorem in Walsh system (Chinese). *Proc. of the Conference on Approximation Theory, Huangshan*, China, 1982: 181-188.

[63] Su W Y. The derivatives and integrals on local fields. *Nanjing University Biquarterly*, 1985, 1: 32-40.

[64] Su W Y. The kernels of product type on local fields(I). *Approx. Theory & its Appl.*, 1985, 1(2): 93-109.

[65] Su W Y. The kernels of product type on local fields (II). *Approx. Theory & its Appl.*, 1986, 2(2): 95-111.

[66] Su W Y. The approximate identity kernels of product type for the Walsh system. *J. of Approx. Theory*, 1986, 47(4): 284-301.

[67] Su W Y. Kernels of Poisson type on local fields. *Science in China, Ser.A*, 1988, 31(6): 641-653.

[68] Su W Y. Pseudo-differential operators in Besov spaces over local fields. *Approx. Theory & Appl.*, 1988, 4(2): 119-129.

[69] Su W Y. Approximation theory and harmonic analysis on locally compact groups. *Approximation, Optimization and Computing: Theory and Appl. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holand*, 1990: 181-184.

[70] Su W Y. Para-product operators over locally compact Vilenkin groups. *A Friendly Collection of Mathematical Papers* I, *Proc. in Celebration of 70's Birthday of Professor Shu Lizhi*, 1990: 1-5.

[71] Su W Y. Fractal and harmonic analysis over locally compact groups(Chinese). *Proc. of non-linear problems in Science and Techniques, Nanjing, Jiangsu, China* , 1991: 17-20.

[72] Su W Y. Psuedo-differential operators and derivatives on locally compact Vilenkin groups. *Science in China, Ser.A*, 1992, 35(7): 826-836.

[73] Su W Y. Gibbs derivative and its applications to approximation theory and fractals. *Approx. Theory VII, Austin U.S.A.*, 1992: 61-63.

[74] Su W Y. Walsh analysis in the last 25 years (Chinese). *Proc. of the Fifth International Workshop on Spectral Techniques, Univ. of Aeronautics and Astronautics, Beijing, China*, 1994: 117-127.

[75] Su W Y. Operators-derivatives-spaces-differential equations on locally compact Vilenkin groups. *Harmonic Analysis in China. Edited by Yang C C et al., Kluwer Academic Publishers, Hong Kong*, 1995: 240-255.

[76] Su W Y. Gibbs derivatives and their applications. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 1995, 16(5 & 6): 805-824.

[77] Su W Y. Para-product operators and para-linearization on locally compact Vilenkin groups. *Science in China, Ser. A*, 1995, 38(11): 1304-1312.

[78] Su W Y. Gibbs derivatives and differential equations on Vilenkin groups. *Recent Developments in Abstract Harmonic Analysis with Applications in Signal Processing. Edited by Stankovic R S. et al., Nauka Belgrade, Yugoslavia*, 1996: 79-94.

[79] Su W Y. Gibbs-Butzer differential operators on locally compact Vilenkin groups. *Science in China, Ser.A*, 1996, 39(7): 718-727.

[80] Su W Y. The boundedness of certain operators on Hölder and Sobolev spaces. *Approx. Theory & Appl.*, 1997, 13(1): 18-32.

[81] Su W Y. Calculus on fractals based upon local fields. *Approx. Theory & Appl.*, 2000, 16(1): 92-100.

[82] Su W Y. Gibbs derivatives — the development over 40 years in China. *Walsh and Dyadic Analysis, Proceedings of the workshop dedicated to the memory of James Edmund Gibbs*, 2007, 15-30. Held in Oct. 18-19, 2007, Niš, Serbia.

[83] Su W Y. Two dimensional wave equations with fractal boundary. Applicable Analysis, 2011, 90(3-4), 533-543. *Proc. of dedicated to the 80's Birth of Porf. Dr. P.L.Butzer*. Held in Mar. 21-24, 2009, Lindau, Germany.

[84] Taibleson M. Fourier Analysis on Local Fields. *Princeton Univ. Press*, 1975.

[85] Triebel H. Theory of Function Spaces. *Basel: Birkauser Verlag*, 1983.

[86] Triebel H. Fractals and Spectra. *Basel: Birkauser Verlag*, 1997.

[87] Van der Waerden B L. 代数学. 丁石孙, 曾肯成, 郝鈵新译. 科学出版社, 1978.

[88] Vladimirov V S, Volovich I V and Zelenoc E I. p-aidc Analysis and Matiematical Physics. *World Scientific Singapore*, 1994.

[89] Wang Z X. Chains of function spaces over Euclidian spaces and local fields. *Approx. Theory & its Appl.*, 2009, 25(2): 92-100.

[90] Wu B Y and Su W Y. The type of convolution operators on Vilenkin groups. *J. of Nanjing University*, 1999, 35(4): 393-400.

[91] Xu N and Su W Y. On eigenvalues of spherical fractal drums. *Science in China Ser.A, Eng.*, 2003, 46(1): 39-47.

[92] Xu Y and Su W Y. Modification and generalization of fractal percolation. *Progress in Natural Sci.*, 1997, 7(2): 148-154.

[93] Yao K, Su W Y and Zhou S P. On the fractal calculus functions of a fractal function. *Appl.Math. J.Chinese Univ., Ser.B*, 2002, 17(4): 377-381.

[94] Zheng S J and Liu J M. Representation thoerems on local fields. *J. of Nanjing Univ. Biquart.*, 1993, 29(4): 533-540.

[95] Zheng S J and Liu J M. A Note on Riesz means over the ring of p-adic integers. *J. of Nanjing Univ. Biquart.*, 1996, 13(1): 58-63.

[96] Zheng S J and Zheng W X. Almost everywhere convergence of sequences of multiplier operators on local fields. *Science in China*, 1997, 40(1): 10-21.

[97] Zheng S J. On Riesz type kernels over local fields. *Approx. Theory & its Appl.*, 1995, 11(4): 24-34.

[98] Zheng S J. Riesz type kernels over the ring of integers of a local fields. *J.Math. Anal. and Appl.*, 1997, 208: 528-552.

[99] Zheng W X, Su W Y and Jiang H K. A note for the concept of derivatives on local fields. *Approx. Theory & its Appl.*, 1990, 6(3): 48-58.

[100] Zheng W X, Su W Y and Ren F X. Walsh Analysis (Chinese). *Proceedings of the Conference on Approximation Theory, Hangzhou*, China 1978: 42-50.

[101] Zheng W X and Su W Y. The logical derivatives and integrals(Chinese). *J. Math. Res. & Exposition*, 1981, 1: 79-90.

[102] Zheng W X and Su W Y. The best approximation on Walsh system (Chinese). *J. of Nanjing University*, 1982, 2: 254-262.

[103] Zheng W X and Su W Y. Walsh analysis and approximation operators (Chinese). *Advances in Mathematics*, 1983, 12(2): 81-93.

[104] Zheng W X and Su W Y. The logical derivatives and integrals II. *J. Math. Res. & Exposition*, 1987, 2: 217-224.

[105] Zheng W X and Zheng S J. Remarks on self-similar fractal sets. *J. of Nanjing Univ. Biquart.*, 1999, 6(1): 1-7.

[106] Zheng W X. Generalized Walsh transform and on extreme problem(Chinese). *Acta Math., Sinica*, 1979, 22(3): 362-374.

[107] Zheng W X. The approximation identity kernels on Walsh system (Chinese). *Chin. Ann. of Math., A*, 1983, 2: 177-184.

[108] Zheng W X. A class of approximation identity kernels. *Approx. Theory & Appl.*, 1984, 1(1): 65-76.

[109] Zheng W X. A note to Hilbert transforms on local fields. *J. of Nanjing Univ. Biquart.*, 1984, 2: 124-131.

[110] Zheng,W.X., Derivatives and approximation theorems on local fields. *Rocky Mountain J. of Math.*, 1985, 15(4): 803-817.

[111] Zheng W X. Further on a class of approximation identity operators on local fields. *Scientia Sinica, Ser.A*, 1987, 30(9): 641-653.

[112] Zheng W X. On a class approximation operators over local fields. *Proc. of Constructive Theory of Functions, Bulgaria*, 1988: 498-505.

[113] Zheng W X. Remarks on the kernel of product type. *A Friendly Collection of Mathematical Papers* I, *Proc. in Celebration of 70's Birthday of Professor Shu Lizhi*, 1990: 43-46.

[114] Zheng W X. On p-adic Cantor functions. *Lecture Notes in Math.*, 1990, 1491: 219-226.

[115] Zheng W X. Expansion of self-similar functions. *Proc. Asian Math.Confer.*'90, 1991: 564-569.

[116] Zheng W X. Self-similar functions on local fields. *Chin. Ann. Math. A*, 1993, 14(1): 93-98.

[117] Zheng W X. Approximation operators and self-similarity over p-adic field. *J. Math. Study*, 1994, 27(1): 9-13.

[118] Zheng W X. On self-similarity of functions. *Harmonic Analysis in China, Edited by Yang C C et al., Kluwer Academic Publishers, Hong Kong*, 1995: 256-265.

[119] Zheng W X. p-adic analysis and its applications to fractals. *Recent Developments in Abstract Harmonic Analysis with Applications in Signal Processing. Edited by Stankovic R S. et al., Nauka Belgrade, Yugoslavia*, 1996: 95-108.

[120] Zheng W X. On generalized Koch curve. *Approx. Theory & its Appl.*, 1999, 15(4): 6-14.

[121] Zhu Y P and Zheng W X. Multiplier in weighted Hardy spaces over locally compact Vilenkin groups. *Chin. Bull. Science*, 1998: 2041-2045.

[122] Zhu Y P and Zheng W X. Besov spaces and Herz spaces on local fields. *Science in China, Ser.A*, 1998, 41(10): 1051-1060.

[123] Zhu Y P and Zheng W X. Cesaro summability of two dimensional Walsh-Fourier series on the ring of integers in a p-series field. *Northeast Math. J.*, 1998, 14(3): 317-324.

[124] Zhu Y P and Zheng W X. Weighted Hardy spaces on homogeneous groups. *Approx. Theory & its Appl.*, 1999, 15(2): 15-21.

[125] Zhu Y P and Zheng W X. Maximal functions and Fourier transforms on local fields. *J.of Nanjing Univ.*, 2000, 36(3): 317-322.

[126] Zhu Y P and Zheng W X. BMO and singular integers over certain disconnected groups. *J. Math. Res. & Exposition*, 2000, 36(3): 317-322.

[127] Zhu Y P and Zheng W X. Weighted local Hardy spaces over locally compact Vilenkin groups. *Acta Math. Scient.*, 2000, 20(Add.): 614-624.

[128] Zhou G C and Su W Y. Elementary aspects of $B^s_{p,q}(K_n)$ and $F^s_{p,q}(K_n)$ spaces. *Approx. Theory & its Appl.*, 1992, 8(2): 11-28.

[129] Zhou G C and Su W Y. Local Hardy spacees on local fields. *J. Math. Res. & Exposition*, 1994, 12(2): 245-248.

[130] Zhou G C. Abel-Poisson type kernels on dyadic fields. *Approx. Theory & its Appl.*, 1991, 7(4): 68-75.

索　引

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯 召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯 召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李 冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张 祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论—— 代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李 雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编